高职高专“十三五”创新型规划教材

# 高等数学——微积分基础

主　编　熊　建
副主编　车　毅
参　编　后小飞　张佳佳

四川大学出版社

责任编辑:唐　飞
责任校对:蒋　玙
封面设计:刘志伟
责任印制:王　炜

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学. 微积分基础 / 熊建主编. —成都：四川大学出版社，2018.7

ISBN 978－7－5690－2175－2

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①熊…　Ⅲ.①高等数学－高等职业教育－教材②微积分－高等职业教育－教材　Ⅳ.①O13 ②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 175812 号

书名　**高等数学——微积分基础**
**GAODENG SHUXUE——WEIJIFEN JICHU**

主　　编　熊　建
出　　版　四川大学出版社
地　　址　成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　　行　四川大学出版社
书　　号　ISBN 978－7－5690－2175－2
印　　刷　北京合众伟业印刷有限公司
成品尺寸　185 mm×260 mm
印　　张　12
字　　数　238 千字
版　　次　2018 年 8 月第 1 版
印　　次　2018 年 8 月第 1 次印刷
定　　价　35.00 元



◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。
电话:(028)85408408/(028)85401670/
(028)85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:http://www.scupress.net

# 前言 PREFACE

随着高职高专教育教学改革的不断深入，对数学课程的基本要求有了很大变化．如何实现高职高专学生的专业培养目标，怎样才能在数学课程学时不断减少的情况下，为学生打好数学基础，这些都给高职高专数学教学工作者提出了新的课题．正是在这样的背景下，我们结合教学改革的实际要求和积累的一些成功经验，精心编写了这本《高等数学——微积分基础》．

本书是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在研究、对比多种同类教材和广泛吸取同行意见，遵循“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，并充分考虑了高职高专学生特点的基础上编写而成的．

在编写中，本书注重培养学生的数学思维能力，提高学生的数学素质，注重介绍重要概念的实际背景，强调数学的思想和方法，强化理论知识的应用，力求使学生会用数学知识解决较简单的实际问题．本书对基本概念和原理的讲解通俗易懂，同时又兼顾数学的科学性和严谨性．归纳起来，本书有以下几方面的特点：

（1）与初等数学紧密衔接．考虑到高职高专学生的数学基础相对薄弱，在编写本书时，对与高等数学联系紧密的数学知识作了较多的介绍．例如，在第一章中对函数等知识进行了重点回顾和总结，以便使学生通过复习初等数学知识更顺利地学习高等数学的内容．

（2）重视数学基础知识的掌握及基本技能的训练．注重从实际问题出发引入概念，尽量借助几何直观图形和物理意义来解释数学概念．在编写过程中，适当降低理论深度，着重基础知识的掌握，加强基本运算方法的训练及计算能力、应用能力的培养．

（3）数学软件教学．为了让学生从不同角度了解他们所学习的内容，提高学生应用数学知识并借助计算机解决数学问题的能力，激发学生学习高等数学的兴趣，适当编写了运用 MATLAB 软件解决相关高等数学问题的章节．

（4）在每节中都编写了习题并配备了答案，以便于学生对该节知识的理解掌握．

本书内容兼顾了理、工、经管各类专业的教学要求，使用时可参照各专业对数学教学的基本要求进行取舍．

本书由熊建任主编，车毅任副主编，后小飞、张佳佳等参与编写．

由于编者水平所限，书中不足之处在所难免，敬请各位读者批评指正．

编　者

2018 年 5 月

# 目录 CONTENTS

# 第一章　函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象则是变动的量．所谓函数关系，就是变量间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法．本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质．

## 第一节　函　数

### 一、区间与邻域

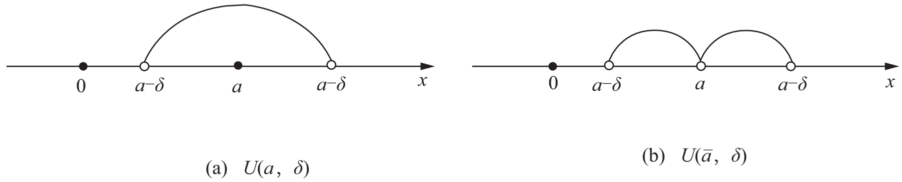
在高等数学中，经常要研究变量在某点附近的变化情况，从而产生了邻域的概念．

设 $a\in\mathbf{R}^*$，$>0$，称开区间$(a-\delta,a+\delta)$为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$$

点 $a$ 称为邻域的中心，$\delta$ 称为邻域的半径．点 $a$ 的 $\delta$ 邻域 $U(a,\delta)$以点 $a$ 为中心，其长度为 $2\delta$，如图 1-1(a)所示．

点 $a$ 的 $\delta$ 邻域去掉中心 $a$ 后，称为点 $a$ 去心的 $\delta$ 邻域(空心邻域)，记作 $U(\bar{a},\delta)$，即 $U(\bar{a},\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$，如图 1-1(b)所示．




(a)　$U(a,\ \delta)$　　　　(b)　$U(\bar{a},\ \delta)$

**图 1-1**

## 二、函数的概念

**定义** 设 $D$ 是一个给定的非空数集，如果对于每一个 $x \in D$，按照一定的对应法则都有唯一的数值 $y$ 和它对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数，记作 $y = f(x)$. 数集 $D$ 叫作这个函数的定义域，$x$ 叫作自变量，$y$ 叫作因变量 .

当 $x$ 取数值 $x_0 \in D$ 时，函数 $y$ 的对应值 $y_0$ 称为函数在点 $x_0$ 处的函数值，记作

$$y_0 = f(x_0) \quad \text{或} \quad y\big|_{x=x_0} = f(x_0)$$

当 $x$ 取遍 $D$ 的各个数值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域 .

函数定义域的确定是研究函数的基本前提 .

函数的定义域是使得函数 $y = f(x)$ 有意义的自变量 $x$ 的取值集合 . 实际问题中，自变量 $x$ 的取值要由实际问题而定 .

**例 1** 求函数 $f(x) = \sqrt{x-2} + \dfrac{\lg(5-x)}{x-3}$ 的定义域 .

**解：**要使函数 $f(x)$ 有意义，必须有

$$\begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ 5-x > 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x \geqslant 2 \\ x < 5 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

所求定义域为：$2 \leqslant x < 5$ 且 $x \neq 3$，即 $[2,3) \cup (3,5)$.

定义域 $D$、对应关系（法则）$f$ 构成了函数的两要素，二者缺一不可 . 因此要判断两个函数是否相同，只要看它们的定义域和对应法则是否相同即可 . 至于自变量和因变量用什么字母表示，则无关紧要 .

**例 2** 下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x$；

(2) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$；

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x) = \sqrt{1-\cos^2 x}, g(x) = \sin x$.

**解：**(1)不同 . $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}^*$，$g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$，两个函数的定义域不同，因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不同 .

(2)不同 . $f(-1) = -1, g(-1) = 1$，两个函数的对应法则不同 $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$

$=|x|$，因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不同．

(3)相同．定义域均为 $\mathbf{R}$，对应法则也相同，因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同．

(4)不同．定义域均为 $\mathbf{R}$，但对应法则不同，$f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$，$g(x)=\sin x$，$f(x)$ 的值域为$[0,1]$，$g(x)$ 的值域为$[-1,1]$，因此 $f(x)$与 $g(x)$不同．

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值只有一个，这种函数叫作单值函数，否则叫作多值函数．例 1、例 2 中的函数都是单值函数．而函数 $y^2=x$，对于任意正实数 $x$ 都有一对互为相反数的实数 $y=\pm\sqrt{x}$ 与之对应，故是多值函数．以后凡是没有特别的说明，本书讨论的都是单值函数．

## 三、函数的性质

### 1. 单调性

**定义**　设函数 $y=f(x)$ 在区间 $D$ 上有定义，$\forall x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$，有：

(1)若 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在 $D$ 上单调增加，用符号$\nearrow$表示．

(2)若 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在 $D$ 上单调减少，用符号$\searrow$表示．

单调增加与单调减少的函数统称单调函数，使函数 $f(x)$单调的区间称为单调区间．

从函数的单调性定义我们可以看到，讨论函数的单调性时必须注意以下几点：

(1)分析函数的单调性，总是在 $x$ 轴上从左向右(即沿自变量 $x$ 增大的方向)看函数值的变化．

(2)函数可能在其定义域的一部分区间内是单调增加(或减少)的，而在另一部分区间内也是单调增加(或减少)的，但在整个定义域内却不是单调的．例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(-\infty,0)$内是单调减少的，在$(0,+\infty)$内也是单调减少的，但在整个定义域上却不是单调的．

### 2. 奇偶性

**定义**　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称，$\forall x \in D$，恒有：

(1) $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$为偶函数．

(2) $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$为奇函数．

例如，函数 $y=x^2$，$y=\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数．函数 $y=x^3$，$y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数．函数 $y=\sin x+\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是非奇非偶函数．

奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 $y$ 轴对称．

注：显然，在定义中，定义域关于原点对称的条件是必要的，因为在非对称区间上根本就

谈不上奇偶性，如 $y=x^2$ 在 $x\in[1,8)$ 上无从说及奇偶性．因此，当研究函数的奇偶性时，必须指明对称区间．

**3. 周期性**

**定义** 设函数 $y=f(x)$ 在 $D=(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$\forall x\in D$，如果 $\exists$ 常数 $T>0$，恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为周期函数，称 $T$ 为 $f(x)$ 的周期．

注：对每一周期函数而言，定义中的 $T$ 有无穷多个，因为如果

$$f(x+T)=f(x)$$

则

$$f(x+2T)=f[(x+T)+T]=f(x+T)=f(x)$$

$$f(x+3T)=f[(x+2T)+T]=f(x+2T)=f(x)$$

…………

因此，若 $T$ 是周期函数 $f(x)$ 的周期，则 $kT$ 也是 $f(x)$ 的周期（$k$ 为非零整数）．

规定：周期函数的周期是指最小正周期．

**例 3** 求 $y=\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x$ 的周期．

**解**：因为 $\sin x$ 的周期为 $2\pi$，$\sin 2x$ 的周期为 $\pi$，$\sin 3x$ 的周期为 $\frac{2\pi}{3}$，而 $2\pi,\pi,\frac{2\pi}{3}$ 的最小公倍数是 $2\pi$，所以函数 $y=\sin x+2\sin x+3\sin 3x$ 的周期为 $2\pi$．

**4. 有界性**

**定义** 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $D$ 上有定义，$\forall x\in D$，如果 $\exists M>0$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上有界；如果不存在这样的正数 $M$，则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上无界．

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界，因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$．

由定义可知，有界函数的图象必介于两条平行于 $x$ 轴的直线 $y=\pm M(M>0)$ 之间．

如果存在一个实数 $M$，恒有 $f(x)\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上有上界；

如果存在一个实数 $m$，恒有 $f(x)\geqslant m$，则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上有下界．

由有界函数的定义可知，有界函数必有上界和下界，而既有上界又有下界的函数才是有界函数．

注：当讨论函数的有界性时，必须指明区间．

例如,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间(0,3)内有下界 $\dfrac{1}{3}$,但无上界,所以函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间(0,3)内无界.但是在区间$(2,+\infty)$内,既有上界 $\dfrac{1}{2}$,又有下界0,所以函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间$(2,+\infty)$内有界.可见,函数的有界性与区间有关.

## 四、反函数与复合函数

### 1. 反函数

设 $y=f(x)$,其定义域为 $D$,值域为 $W$. 如对于 $W$ 中的每一个 $y$ 值,都可以由关系式 $y=f(x)$ 确定出唯一的($x$ 值 $x\in D$)与之对应,这样就确定了一个以 $y$ 为自变量的新函数 $x=f^{-1}(y)$,其定义域为 $W$,值域为 $D$. $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,或称它们互为反函数.

习惯上用 $x$ 表示自变量,$y$ 表示因变量,所以将 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$,定义域为 $W$,值域为 $D$.

$y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

**例 4** 求函数 $y=10^{x+1}$ 的反函数.

**解**:由 $y=10^{x+1}$ 解得 $x+1=\lg y$,即 $x=\lg y-1$. 互换 $x$ 和 $y$ 位置,则其反函数为 $y=\lg x-1$.

注:

(1)互为反函数的定义域与值域正好互换.

(2)并不是所有的函数都有反函数,如 $y=c$(常量)就无反函数.

(3)只有 $x$ 与 $y$ 是一一对应的函数才有反函数.

例如,$y=x^2,x\in\mathbf{R},x=\pm\sqrt{y}$ 多值,无反函数.

### 2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$,$u\in D_1$,$y\in W_1$,而 $u$ 是 $x$ 的函数 $u=\varphi(x)$,$x\in D_2$,$u\in W_2$,且 $\varphi(x)$ 的值域包含于 $f(u)$ 的定义域,即 $W_2\subseteq D_1$,则 $y$ 通过 $u$ 也是 $x$ 的函数,称此函数是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

$x$ 为自变量,$u$ 为中间变量,$f$ 为外层函数(简称外函),$\varphi$ 为内层函数(简称内函).

例如,$y=2^{\sin x}$ 是由 $y=2^u$,$u=\sin x$,$x\in(-\infty,+\infty)$,复合而成的复合函数.

## 五、基本初等函数与初等函数

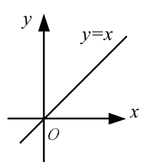
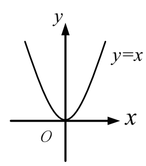
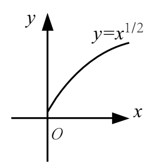
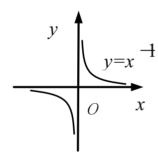
### 1. 基本初等函数

在实际问题中遇到的函数是多种多样的，人们在长期的生产实践和科学研究中，经过分析、归纳、综合总结，发现大多数的函数是由 5 种最基本的函数经过加、减、乘、除运算和复合运算构成的．这 5 种最基本的函数分别是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，统称基本初等函数．基本初等函数在初等数学中已经作了系统的研究，现简要回顾如下．

(1)幂函数：$y=x^a$($a$ 是常数).

幂函数见表 1-1.

**表 1-1**

| 函数 | $a=1$ | $a=2$ | $a=1/2$ | $a=-1$ |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 图象 |  |  |  |  |
| 定义域 | $(-\infty,+\infty)$ | $(-\infty,+\infty)$ | $(0,+\infty)$ | $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ |
| 值域 | $(-\infty,+\infty)$ | $(0,+\infty)$ | $(0,+\infty)$ | $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ |
| 奇偶性 | 奇函数 | 偶函数 | 非奇非偶函数 | 奇函数 |
| 单调性 | 单调递增 | $(-\infty,0)$内递减<br>$[0,+\infty)$上递增 | 单调递增 | $(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$<br>内都递减 |

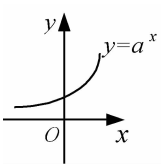
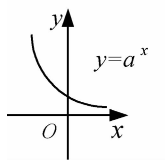
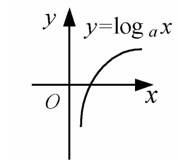
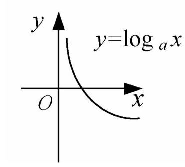
(2)指数函数：$y=a^x$($a>0,a\neq1,a$ 是常数).

指数函数见表 1-2.

(3)对数函数：$y=\log_a x$($a>0,a\neq1,a$ 是常数).

对数函数见表 1-2.

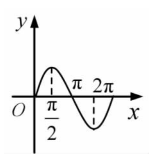
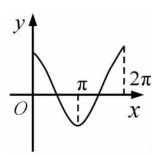
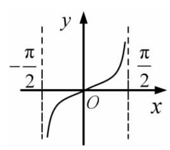
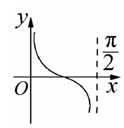
**表 1-2**

| 函数 | $y=a^x(a>0,a\neq1)$ | | $y=\log_a x\ (a>0,a\neq1)$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $a>1$ | $0<a<1$ | $a>1$ | $0<a<1$ |
| 图象 |   |   |   |   |
| 定义域 | $(-\infty,+\infty)$ | $(-\infty,+\infty)$ | $(0,+\infty)$ | $(0,+\infty)$ |
| 值域 | $(0,+\infty)$ | $(0,+\infty)$ | $(-\infty,+\infty)$ | $(-\infty,+\infty)$ |
| 单调性 | 单调递增 | 单调递减 | 单调递增 | 单调递减 |

（4）三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$.

三角函数见表 1-3.

**表 1-3**

| 函数 | $y=\sin x$ | $y=\cos x$ | $y=\tan x$ | $y=\cot x$ |
|---|---|---|---|---|
| 图象 |   |   |   |   |
| 定义域 | $(-\infty,+\infty)$ | $(-\infty,+\infty)$ | $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi-\frac{\pi}{2}),k\in\mathbf{Z}$ | $(k\pi,k\pi+\pi),k\in\mathbf{Z}$ |
| 值域 | $[-1,1]$ | $[-1,1]$ | $(-\infty,+\infty)$ | $(-\infty,+\infty)$ |
| 奇偶性 | 奇函数 | 偶函数 | 奇函数 | 奇函数 |

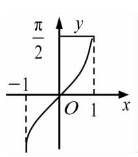
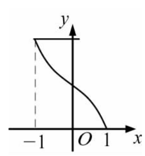
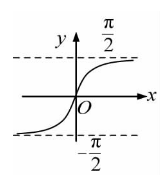
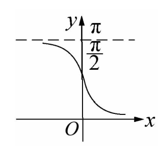
**续表 1-3**

| 函数 | $y=\sin x$ | $y=\cos x$ | $y=\tan x$ | $y=\cot x$ |
|---|---|---|---|---|
| 周期性 | $T=2\pi$ | $T=2\pi$ | $T=\pi$ | $T=\pi$ |
| $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ | 单调递增 | 单调递减 | 单调递增 | 单调递减 |
| $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ | 单调递减 | 单调递减 | 单调递增 | 单调递减 |
| $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ | 单调递减 | 单调递增 | 单调递增 | 单调递减 |
| $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ | 单调递增 | 单调递增 | 单调递增 | 单调递减 |

(5) 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

反三角函数见表 1-4.

**表 1-4**

| 函数 | $y=\arcsin x$ | $y=\arccos x$ | $y=\arctan x$ | $y=\operatorname{arccot} x$ |
|---|---|---|---|---|
| 图象 |   |   |   |   |
| 定义域 | $[-1,1]$ | $[-1,1]$ | $(-\infty,+\infty)$ | $(-\infty,+\infty)$ |
| 值域 | $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ | $[0,\pi]$ | $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ | $(0,\pi)$ |
| 单调性 | 单调递增 | 单调递减 | 单调递增 | 单调递减 |
| $f(-x)$ | $f(-x)=-f(x)$ | $f(-x)=\pi-f(x)$ | $f(-x)=f(x)$ | $f(-x)=\pi-f(x)$ |

**2. 初等函数**

由基本初等函数与常数经过有限次四则运算和有限次复合运算构成，并且能用一个解析式表示的函数，称为初等函数 .

例如，$y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$，$y=3x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 都是初等函数；而分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ x+3, & x\leqslant 0\end{cases}$$

不能用一个解析式表示，所以不是初等函数．

## 习题 1-1

1．设 $A=\{x\mid 3<x<5\}$，$B=\{x\mid x>4\}$，求：(1) $A\cup B$；(2) $A\cap B$.

2．设 $I=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{2,3,4\}$，$B=\{3,6,7\}$，求：$\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{(A\cup B)}$.

3．设 $A$，$B$ 都是集合 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 的子集，且 $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,3,7,9\}$，试求 $A\cup B$.

4．用区间表示下列不等式的解的集合．

(1) $|x-4|<\dfrac{1}{4}$；　　(2) $|2x-3|<0.1$；

(3) $|x|>100$；　　(4) $0<|x-1|<0.01$.

5．设当 $x\in U(1,\delta)$ 时，$|2x-2|<\varepsilon$，当 $\varepsilon$ 分别等于 0.1 和 0.01 时，求邻域半径 $\delta$ 各等于多少？

6．求下列函数的定义域．

(1) $y=\arcsin(x-3)$；　　(2) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(3) $y=\dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$；　　(4) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$；

(5) $y=\dfrac{\arcsin\dfrac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$；　　(6) $y=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2-2x+1}$.

7．设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x+1, & x\leqslant 0\\ \cos x-1, & x>0\end{cases}$，求 $f(0)$，$f(\dfrac{\pi}{2})$，$f(-\dfrac{\pi}{2})$.

8．下列函数哪些是偶函数？哪些是奇函数？哪些是非奇非偶函数？说明理由．

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　　(2) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；

(3) $y=|\sin x|$；　　(4) $y=\sin x-\cos x+2$；

(5) $y = x(x-2)(x+2)$；　　(6) $y = \tan x + x$.

9. 下列函数中哪些是周期函数？若是周期函数，指出其周期.

(1) $y = 2\cos(x-2)$；　　(2) $y = 3\sin 5x$；

(3) $y = 1 + \sin \pi x$；　　(4) $y = x\cos x$.

10. 判定下列函数是由哪些基本初等函数或简单函数复合而成的.

(1) $y = (6x-1)^3$；　　(2) $y = e^{\sin 5x}$；

(3) $y = \ln \sqrt{2+\cos x^2}$；　　(4) $y = 2^{\mathrm{anctan}\sqrt{x^2+1}}$.

11. 某人手机按“套餐”付资费，其方案为月基本费 128 元，包含本地通话费 800 min，超过 800 min，本地主叫通话资费为 0.16 元/分钟，被叫免费. 试写出该手机月资费 $y$(元)与主叫通话时间 $x$(min)之间的函数关系.

# 第二节　数列极限

## 一、数列极限概述

### 1. 数列的单调性与有界性

**定义 1**　若存在一个常数 $M>0$，使得 $|u_n| \leqslant M(N=1,2,\cdots)$ 恒成立，则称数列 $\{u_n\}$ 为有界数列，或称该数列有界；若数列 $\{u_n\}$ 满足条件 $u_n \leqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 或 $u_n \geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，则分别称为单调递增数列或单调递减数列. 单调递增数列和单调递减数列统称单调数列.

例如

$$\{u_n\}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$$

是单调递增数列，且是有界的；

$$\{u_n\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

是单调递减数列，且是有界的；

$$\{u_n\}: 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$$

是有界数列，但不单调；

$$\{u_n\}: 2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots$$

是单调递增且无界的数列；

$$\{u_n\}: -1, -2, -3, \cdots, -n, \cdots$$

是单调递减且无界的数列；

$$\{u_n\}: -1, 2, -3, 4, \cdots, (-1)^n n, \cdots$$

既不是单调又不是有界的数列.

**2. 数列极限的概念**

下面给出数列极限的描述性定义.

**定义 2**　如果数列 $\{u_n\}$ 的项数 $n$ 无限增大时,它的一般项 $u_n$ 无限接近于某个确定的常数 $A$,则称 $A$ 是数列 $u_n$ 的极限,此时也称数列 $\{u_n\}$ 收敛于 $A$,记作

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A \quad 或 \quad u_n \to A(n \to +\infty)$$

如果数列 $\{u_n\}$ 的项数 $n$ 无限增大时,它的一般项 $u_n$ 不接近于任何确定的常数,则称数列 $\{u_n\}$ 没有极限,或称数列 $\{u_n\}$ 发散.

极限存在的数列称为收敛数列,极限不存在的数列称为发散数列.

**例 1**　试求下列数列的极限:

(1) $\{u_n\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$;

(2) $\{u_n\}: 1, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}, \frac{9}{5}, \cdots, \frac{2n+(-1)^n}{n}, \cdots$;

(3) $\{u_n\}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$;

(4) $\{u_n\}: -2, 4, -6, 8, \cdots, (-1)^n 2n, \cdots$;

(5) $\{u_n\}: 1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$.

**解:**(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+(-1)^n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[2 + \frac{(-1)^n}{n}\right] = 2$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$;　　(4)发散;　　(5)发散.

## 二、收敛数列的基本性质

**定理 1(唯一性)**　若数列 $\{u_n\}$ 收敛,则数列 $\{u_n\}$ 的极限是唯一的.

**定理 2(有界性)**　若数列 $\{u_n\}$ 收敛,则数列 $\{u_n\}$ 一定有界.

**定理 3(保序性)**　设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,若存在正整数 $N$,当 $n>N$ 时,$a_n \leqslant b_n$,则 $a \leqslant b$.

**推论(保号性)** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且 $a\neq 0$，则存在正整数 $N$，使得当 $n>N$ 时的一切 $a_n$ 都与 $a$ 同号.

**定理 4** 单调有界数列一定收敛.

## 习题 1-2

1. 数列 $\{x_n\}$ 的通项如下，观察数列的变化趋势，哪些数列收敛？哪些数列发散？若数列收敛，写出其极限.

(1) $x_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$；　　(2) $x_n=3+\dfrac{1}{n}$；

(3) $x_n=\dfrac{3n+1}{3n-1}$；　　(4) $x_n=\dfrac{2}{n^2}$；

(5) $x_n=\dfrac{2}{(-1)^n}$；　　(6) $x_n=4+(-1)^n$；

(7) $x_n=-2+(\dfrac{1}{3})^n$；　　(8) $x_n=2^n$.

2. 选择题.

(1)下列数列收敛的有(　　).

A. $5,5,\cdots,5,\cdots$　　B. $\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{5},\dfrac{5}{7},\dfrac{7}{9},\cdots,\dfrac{2n-1}{2n+1},\cdots$

C. $\dfrac{1}{3},-\dfrac{3}{5},\dfrac{5}{7},-\dfrac{7}{9},\cdots,(-1)^{n-1}\dfrac{2n-1}{2n+1},\cdots$　　D. $-\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},-\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\cdots,(-1)^n\dfrac{n}{n+1},\cdots$

(2)下列数列发散的有(　　).

A. $0,\dfrac{1}{3},0\ \dfrac{1}{9},0,\dfrac{1}{27},\cdots,0,\dfrac{1}{3^{\frac{n}{2}}},\cdots$ ($n$ 为偶数)　　B. $1,-2,\dfrac{1}{3},-4,\cdots,\dfrac{1}{2n-1},-2n,\cdots$

C. $\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3},\cdots,\dfrac{1}{n+1},\dfrac{n+2}{n+1},\cdots$　　D. $-1,2,-3,4,\cdots,(-1)^n n,\cdots$

(3)下列数列收敛于 1 的有(　　).

A. $\left\{1-\dfrac{1}{2^n}\right\}$　　B. $\left\{(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right\}$

C. $x_n=\begin{cases}\dfrac{2^n-1}{2^n}, & n\text{ 为奇数}\\[2ex] \dfrac{2^n+1}{2^n}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$　　D. $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$

(4)下列数列收敛于 0 的有(　　).

A. $x_n=\begin{cases}0, n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{1}{2^n}, n\text{ 为偶数}\end{cases}$　　B. $1,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\cdots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+2},\cdots$

C. $-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{5},\cdots,(-1)^n\frac{1}{n},\cdots$　　D. $1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\cdots,\frac{1}{2n-1},\cdots$

(5)若数列 $\{x_n\}$ 与数列 $\{y_n\}$ 的极限分别是 $a$ 与 $b$，且 $a\neq b$，则数列 $x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3$ 的极限为(　　).

A. $a$　　B. $b$

C. $a+b$　　D. 不存在

## 第三节　函数极限

### 一、函数极限的概念

上面讲了数列的极限，如果把数列看作 $n$ 的函数 $u_n=f(n)$，那么数列 $u_n=f(n)$ 的极限表示当自变量 $n$ 取正整数而无限增大(即 $n\to\infty$)时，对应的函数 $f(n)$ 无限接近于 $A$. 抽去数列极限概念的具体意义，保留它们的数学特征，就得到了函数极限的一般概念.

在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个数，那么这个确定的数就叫在这一变化过程中的函数的极限. 这个极限是与自变量的变化过程密切相关的，由于自变量的变化过程不同，函数的极限就表现为不同的形式. 下面就函数在自变量的不同变化过程中的变化趋势问题分别加以讨论.

**1. 当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限**

如果 $x>0$ 且无限增大，则称 $x$ 趋向于正无穷大，记为 $x\to+\infty$；如果 $x<0$ 且 $|x|$ 无限增大，则称 $x$ 趋向于负无穷大，记为 $x\to-\infty$；如果对 $x\in\mathbf{R}$，$|x|$ 无限增大，则称 $x$ 趋向于无穷大，记为 $x\to\infty$. 显然，$x\to\infty$ 包含 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 两种趋势.

一般地，给出下面描绘性的定义.

**定义 1**　如果当 $x\to\infty$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 $A$，则称常数 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\quad\text{或}\quad f(x)\to A(\text{当 } x\to\infty \text{ 时})$$

**定义 2** 如果当 $x\to+\infty$ 时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 $A$,则称常数 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to+\infty\ 时)$$

如果当 $x\to-\infty$ 时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 $A$,则称常数 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to-\infty\ 时)$$

例如,对于函数

$$f(x)\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 2^x-1, & x\leqslant 0\end{cases}$$

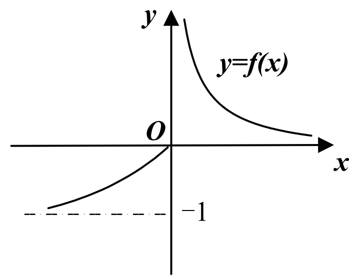



图 1-2

由图 1-2 可以看出

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2^x-1)=-1$$

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\neq\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,我们可以得出 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在.

**2. 当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限**

$x\to x_0$ 表示 $x$ 趋近于 $x_0$,包含以下两种情况:

(1) $x$ 从大于 $x_0$ 一侧趋近于 $x_0$,记作 $x\to x_0^+$;

(2) $x$ 从小于 $x_0$ 一侧趋近于 $x_0$,记作 $x\to x_0^-$.

下面给出 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$的极限的一般定义.

**定义 3** 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个去心邻域 $U(\overline{x_0},\delta)$ 内有定义,$x\in U(\overline{x_0},\delta)$,当 $x\to x_0$ 时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 $A$,则称常数 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to x_0\ 时)$$

**3. 左极限与右极限**

在定义 3 中,“$x\to x_0$”是指 $x$ 既从 $x_0$ 的左侧也从 $x_0$ 的右侧趋向于 $x_0$,但是有时仅需要考虑 $x$ 从 $x_0$ 的一侧趋向于 $x_0$ 时函数的变化趋势.

**定义 4** 如果函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个左邻域 $(x_0-\delta,x_0)$ 内有定义,当 $x$ 从 $x_0$ 的左侧趋向于 $x_0$(记作 $x\to x_0^-$)时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 $A$,则称常数 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x$ 趋向于 $x_0$ 时的左极限,记作

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A$$

若函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个右邻域$(x_0,x_0+\delta)$内有定义,当 $x$ 从 $x_0$ 的右侧趋向于 $x_0$(记作 $x\to x_0^+$)时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 $A$,则称常数 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x$ 趋向于 $x_0$ 时的右极限,记作

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

左极限和右极限统称单侧极限.

**定理 1** $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$ 成立的充要条件是 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^+\\(x\to+\infty)}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0^-\\(x\to-\infty)}}f(x)=A$.

**例 1** 试求函数 $f(x)\begin{cases}x+1, & -\infty<x<0\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & x>1\end{cases}$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的极限.

**解:**(1) 因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^2=0$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限不相等,所以它在 $x=0$ 处的极限不存在.

(2) 因为

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x^2=1$$
$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}1=1$$

即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的左、右极限相等,所以它在 $x=1$ 处的极限存在且为 1.

**例 2** 验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

**证:**
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1$$

左、右极限存在但不相等,所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

## 二、函数极限的基本性质

利用函数极限的定义,可证明以下定理.

**定理 2(唯一性)** 若 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 的极限存在,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A)$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B(\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=B)$,则 $A=B$.

**定理 3(局部有界性)** 若 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时,函数 $f(x)$ 的极限存在,则函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一个去心小邻域内(或 $|x|$ 充分大的范围外)有界.

注:极限存在的函数在其定义域的某个局部范围内有界,但并不意味它在整个定义域内有界.

**定理 4(极限的局部保号性)** 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$,而且 $A > 0$(或 $A < 0$),那么就存在着点 $x_0$ 的某一去心邻域,当 $x$ 在该邻域内时,就有 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$).

**定理 5(保序性)** 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, 且 $A \leqslant B$ ,那么就存在着点 $x_0$ 的某一去心邻域,当 $x$ 在该邻域内时, $f(x) \leqslant g(x)$.

**推论** 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, 且 $A < B$, 那么就存在着点 $x_0$ 的某一去心邻域,当 $x$ 在该邻域内时, $f(x) < g(x)$.

## 习题 1-3

1. 选择题.

(1)函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有定义是 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 有极限的(　　).

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

(2) $f(x_0 + 0)$ 与 $f(x_0 - 0)$ 都存在是函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有极限的(　　).

A. 必要条件　　B. 充分条件　　C. 充要条件　　D. 无关条件

(3)设 $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x \leqslant 0 \\ x^2 - 2, & x > 0 \end{cases}$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$(　　).

A. 2　　B. $-2$　　C. $-1$　　D. 0

(4)下列说法正确的是(　　).

A. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

B. 若函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处的极限不存在,则 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 处的极限也不存在

C. 如果 $f(x_0) = 5, f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = 4$ ,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

D. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 则必有 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某去心邻域内有定义

2. 设函数

$$f(x)\begin{cases} x + 1, & x < 3 \\ 0, & x = 3 \\ 2x - 3, & x > 3 \end{cases}.$$

试利用函数极限存在的充要条件判断 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ 是否存在．

3．设函数

$$f(x)\begin{cases}x+4, & x<1\\ 2x-1, & x\geqslant 1\end{cases}.$$

求 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，并判断 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在．

# 第四节　无穷小与无穷大

## 一、无穷小

**定义 1**　如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为 0，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$），则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷小量，简称无穷小．

例如，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，所以函数 $\sin x$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小量．因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小量．因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$，所以数列 $\{\dfrac{(-1)^n}{n}\}$ 是当 $n\to\infty$ 时的无穷小量．

注：无穷小量是变量，与一个很小的确定常数不能混为一谈．零是可以作为无穷小量的唯一的常数．

无穷小具有如下性质：

**性质 1**　有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量．

**性质 2**　有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量．

**推论 1**　常数与无穷小量的乘积是无穷小量．

**推论 2**　在同一过程中，有极限的变量与无穷小量的乘积是无穷小量．

**推论 3**　有限个无穷小量的乘积也是无穷小量．

例如，当 $x\to 0$ 时，$x\sin\dfrac{1}{x}$，$x^2\arctan\dfrac{1}{x}$ 都是无穷小量．

**例 1**　证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$.

**证**:因为 $\dfrac{\cos x}{x}=\dfrac{1}{x}\cdot\cos x$,其中 $\cos x$ 为有界函数,$\dfrac{1}{x}$ 为当 $x\to\infty$ 时的无穷小量,所以由性质 2 可知,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$.

**定理 1(极限和无穷小的关系)** $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$,其中当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时 $\alpha(x)$ 为无穷小.

例如,前面已经讲过 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}=2$,于是 $\dfrac{2x+1}{x}=2+\alpha(x)$,其中当 $x\to\infty$ 时 $\alpha(x)=\dfrac{1}{x}$ 为无穷小.

## 二、无穷大

**定义 2** 如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$|f(x)|$ 无限增大,则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷大量,简称无穷大,记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$.

有时所研究的无穷大具有确定的符号,即在 $x$ 的某种趋势下,$f(x)$ 恒正且无限增大,或者恒负且绝对值无限增大,则记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=+\infty \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=-\infty$$

例如,(1)当 $x\to\infty$ 时,$x^2$ 无限增大,所以 $x^2$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷大,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$,$\lim\limits_{x\to\infty}(-x^2)=-\infty$ 等.

(2)当 $x\to\infty$ 时,$|x|$ 无限增大,所以 $x$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷大,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$.

(3)当 $x\to+\infty$ 时,$2^x$ 取正值而无限增大,所以 $x$ 是当 $x\to\infty$ 时的正无穷大,记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$.

(4)当 $x\to0^+$ 时,$\ln x$ 总取负值而绝对值无限增大,所以 $\ln x$ 是 $x\to0^+$ 时的负无穷大,记作 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$.

注:(1)无穷大是指绝对值可以任意变大的变量,无穷大不是数,不可与绝对值很大的数混为一谈.

(2)无穷大是一种特殊的无界变量,但无界变量未必是无穷大.

例如,当 $x\to0$ 时,函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 是一个无界变量,但不是无穷大.

## 三、无穷大与无穷小的关系

无穷大与无穷小之间有一种简单的关系.

**定理 2(无穷大和无穷小的关系)**　在自变量的同一变化过程中：

(1)如果 $f(x)$ 是无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小；

(2)如果 $f(x) \neq 0$ 且 $f(x)$ 是无穷小，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大．

例如，当 $x \to 0$ 时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 是无穷大量，而函数 $y=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=x$ 在 $x \to 0$ 时是无穷小量．当 $x \to 1$ 时，函数 $y=x-1$ 是无穷小量，而函数 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 在 $x \to 1$ 时是无穷大量．

注：无穷大与无穷小不同的是，在自变量同一变化过程中，两个无穷大的和、差、商的极限没有确定的结果，需针对具体情况解决．

## 习题 1-4

1. 选择题．

(1)当 $x \to 0$ 时，下面说法错误的是(　　)．

A. $x\sin x$ 是无穷小　　B. $x\sin\dfrac{1}{x}$ 是无穷小

C. $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 是无穷大　　D. $\dfrac{1}{x}$ 是无穷大

(2)若 $x$ 是无穷小，下面说法错误的是(　　)．

A. $x^2$ 是无穷小　　B. $2x$ 是无穷小

C. $x-0.0001$ 是无穷小　　D. $-x$ 是无穷小

(3)两个非无穷小量的和为(　　)．

A. 非无穷小量　　B. 无穷小量

C. 可能是无穷小量

(4)两个非无穷小量的积(　　)．

A. 必定不是无穷小量　　B. 可能是无穷小量

C. 必定是无穷小量

(5)设 $x \to a$ 时，$f(x)$ 为无穷小量，$g(x)$ 为无穷大量，则(　　)必为无穷大量．

A. $f(x)+g(x)$　　B. $\dfrac{1}{f(x)}+g(x)$

C. $f(x)\cdot g(x)$　　D. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

(6)当 $x \to \infty$ 时,函数 $f(x) = x \cdot \sin x$ 是(　　).

A. 无穷大量　　　　B. 无穷小量

C. 无界函数　　　　D. 有界函数

2. 计算当 $x$ 趋向何值时,下列各题中的函数极限为无穷大.

(1) $y = \dfrac{1}{x^3}$;　　(2) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$;

(3) $y = \dfrac{x-1}{x^3+1}$;　　(4) $y = x^2$.

3. 下列函数在指定的变化趋势下是无穷小量还是无穷大量?

(1) $\ln x (x \to 1)$ 及 $(x \to 0^+)$;　　(2) $x(\sin \dfrac{1}{x} + 2)(x \to 0)$;

(3) $e^x (x \to +\infty)$ 及 $(x \to -\infty)$;　　(4) $e^{\frac{1}{x}} (x \to 0^+)$ 及 $(x \to 0^-)$.

4. 下列函数当 $x \to \infty$ 时均有极限,试把下列每个函数表示为它的极限值与一个当 $x \to \infty$ 时的无穷小之和的形式.

(1) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3 - 1}$;　　(2) $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^3 + 1}$;

(3) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$;　　(4) $f(x) = \dfrac{5x}{1 + x}$.

# 第五节　极限的运算法则

## 一、极限的四则运算法则

下面将讨论极限的求法,主要是建立极限的四则运算和复合函数的极限运算法则,利用这些法则,就可以求某些函数的极限了.

在下面的讨论中,记号 lim 下面没有标明自变量的变化过程,可以是 $x \to x_0$(包括 $x \to x_0^+$ 或 $x \to x_0^-$),$x \to \infty$(包括 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$)等.

在同一定理中,考虑的是 $x$ 的同一变化过程,其主要定理如下:

**定理 1**　设 $\lim f(x) = A$,$\lim g(x) = B$,那么:

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$;

(2) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB$;

(3) 当 $B \neq 0$ 时,有 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

上述运算法则对有限个的情形也是成立的,可写为:

设 $\lim f_i(x) = A_i (i = 1,2,\cdots,n)$, 那么:

(1) $\lim[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x)] = k_1 A_1 + k_2 A_2 + \cdots + k_n A_n$ $(k_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2,\cdots,n)$;

(2) $\lim[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x)] = A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n$ .

关于数列,也有类似的极限四则运算法则,有下面定理.

**定理 2**　设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ ,那么:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = A \cdot B$;

(3) 当 $y_n \neq 0 (n = 1,2,\cdots)$ 且 $B \neq 0$ 时,有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}$.

**推论 1**　常数可以提到极限号前,即 $\lim c \cdot f(x) = c\lim f(x)$.

**推论 2**　若 $\lim f(x) = A$, $m$ 为正整数,则

$$\lim[f(x)]^m = [\lim f(x)]^m = A^m$$

特殊地,有

$$\lim_{x\to x_0} x^m = (\lim_{x\to x_0} x)^m = {x_0}^m$$

**例 1**　计算 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 + 8x - 7)$.

**解**:运用定理 1 及其推论可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x^2 + 8x - 7) &= \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 8x - \lim_{x\to 1} 7 \\ &= (\lim_{x\to 1} x)^2 + 8 \lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 7\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 1} x = 1, \lim\limits_{x\to 1} 7 = 7$, 因此

$$\lim_{x\to 1}(x^2 + 8x - 7) = 1^2 + 8 \times 1 - 7 = 2$$

一般地,有

$$\lim_{x\to x_0}(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = a_n {x_0}^n + a_{n-1} {x_0}^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0$$

即多项式函数在 $x_0$ 处的极限等于该函数在 $x_0$ 处的函数值.

**例 2**　计算 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 6x + 4}$.

**解**:由例 1 知道,当 $x \to -1$ 时,所给函数的分子和分母的极限都存在,且分母的极限不为零,即

$$\lim_{x\to-1}(2x^2-6x+4)=2\times(-1)^2-6\times(-1)+4=12\neq 0$$

所以由定理 1,商的极限运算法则即关于多项式函数极限的结论可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2-6x+4}&=\frac{\lim\limits_{x\to-1}(4x^2-3x+1)}{\lim\limits_{x\to-1}(2x^2-6x+4)}\\&=\frac{4(-1)^2-3(-1)+1}{12}\\&=\frac{8}{12}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

但是必须注意:若分母的极限为零,则关于商的极限的运算法则不能应用,因此要特别考虑.

**例 3** 计算 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3}{x^2-5x+4}$.

**解**:因为分子的极限不为零,但分母的极限 $\lim\limits_{x\to1}(x^2-5x+4)=1^2-5\times1+4=0$,因此,不能应用商的极限运算法则.对于这类题目应先计算其倒数的极限,再应用无穷小和无穷大的关系得到结果,具体计算过程如下:

由于

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-3}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^2-5x+4)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2-3)}=\frac{0}{-2}=0$$

即当 $x\to1$ 时,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3}$ 为无穷小,因此,由无穷小与无穷大的关系可知,当 $x\to1$ 时,$\dfrac{x^2-3}{x^2-5x+4}$ 为无穷大,即

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3}{x^2-5x+4}=\infty$$

有时,所给函数在自变量的某个趋向中,分子、分母的极限都为零,人们常称这类极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型极限.这时不能直接应用商的极限运算法则.

**例 4** 计算 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$.

**解**:所给函数的分母、分子的极限均为 0,即 $\dfrac{0}{0}$ 型,它们都有趋向于 0 的公因子 $(x-1)$,当 $x\to1$ 但 $x\neq1$ 时,可约掉这个不为 0 的公因子,故

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{1-2}{1+1+1}$$
$$=-\frac{1}{3}$$

这种求极限的方法的要点是先将分子、分母因式分解，然后约去分子、分母中的无穷小量因子，再用极限的运算法则求解．

还有一类函数，当自变量趋于无穷大时，其分子、分母都趋于无穷大，这类极限称为$\frac{\infty}{\infty}$型极限．对这类极限的求解也不能直接应用商的运算法则．

**例 5**　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

**解**：用 $x^3$ 去除分子及分母，然后取极限得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{3}{7}$$

这是因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x^n}=a\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=a(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x})^n=0$$

式中，$a$ 为常数；$n$ 为正整数；$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

**例 6**　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$.

**解**：先用 $x^3$ 去除分子、分母，然后求极限得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{0}{2}=0$$

**例 7**　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$.

**解**：应用例 6 的结果，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=\infty$$

例 5、6、7 是下列情形的特例，即当 $a_n\neq 0$，$b_m\neq 0$ 时，$m$，$n$ 为正整数，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & m=n\\ 0, & m>n\\ \infty, & m<n\end{cases}$$

注：本式只适用于 $x\to\infty$，或 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 的情形 .

**例 8** 计算 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

**解：**由于括号内两项的极限都是无穷大，因此人们常称为 $\infty-\infty$ 型极限，不能直接应用定理 1 计算 . 一般的处理方法是先通分，再运用前面介绍过的求极限的方法求解 .

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)&=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+2}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

## 二、复合函数的极限运算法则

关于复合函数的极限，有下面的定理 .

**定理 3** 设函数 $y=f[\varphi(x)]$ 由函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成 . 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，且在 $x_0$ 的一个去心邻域内 $\varphi(x)\neq u_0$，又有 $y=f[\varphi(x)]$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

证明从略 .

根据此定理，就可以采用变量替换的方法来计算函数的极限 .

**例 9** 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x$.

**解：**令 $u=3x$，则函数 $y=\sin 3x$ 可视为由 $y=\sin u$，$u=3x$ 构成的复合函数 .

因为当 $x\to 0$ 时，$u=3x\to 0$，且 $u\to 0$ 时 $\sin u\to 0$，所以由定理 3 得

$$\lim_{x\to 0}\sin 3x=0$$

**例 10** 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}$.

**解：**令 $u=\dfrac{1}{x}$. 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，且 $\lim\limits_{u\to 0}2^u=1$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}=1$.

**例 11**　计算 $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^{-\frac{1}{x}}$.

**解**:因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

由于 $2^{-\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}}$，因此，由无穷大与无穷小的关系可知，$\lim\limits_{x\to 0^+} 2^{-\frac{1}{x}}=0$.

**例 12**　计算 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

**解**:当 $x\to\infty$ 时，分子及分母的极限都不存在，故关于商的极限的运算法则不能应用. 如果把 $\dfrac{\sin x}{x}$ 看作 $\dfrac{1}{x}\cdot\sin x$，由于当 $x\to\infty$ 时 $\dfrac{1}{x}$ 为无穷小，而 $\sin x$ 是有界函数，有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

## 习题 1-5

1. 计算下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-n+1}{5n^3+n^2+n}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-2)^3}{x^2+2x+3}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{3^n+1}$.

2. 计算下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x-2}{x^2+1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x^2+1}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+3}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 3}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

3. 计算下列各极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+(n-1)}{n^2}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{3^n})$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^3}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$；

(6) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

4. 计算下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^3}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^5-x+1)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cos\dfrac{1}{x-1}$； (4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$.

5. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=1$，试求 $a$ 和 $b$ 的值 .

## 第六节 夹逼准则与两个重要极限

下面将介绍判定极限存在的两个准则，以及作为应用准则的例子 .

**定理 1** 如果数列 $\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 及 $\{w_n\}$ 满足下列条件：

(1) $v_n < u_n < w_n (n=1,2,\cdots)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} w_n = a$.

那么数列 $\{u_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

**定理 1′** 如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x) = A$，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x) = A$$

定理 1 及定理 1′ 称为夹逼定理，证明从略 .

**例 1** 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

**解：** $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

**重要极限 1** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

**例 2** 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

**解:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$

**例 3** 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

**解:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{2}$

**例 4** 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$.

**解:** 令 $5x=u$，当 $x\to 0$ 时 $u\to 0$，因此有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{\frac{3}{5}u}=\frac{5}{3}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=\frac{5}{3}\times 1=\frac{5}{3}$$

如果不写出中间变量,那么可按如下格式进行求解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin 5x}{\frac{3}{5}5x}=\frac{5}{3}\lim_{u\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\frac{5}{3}\times 1=\frac{5}{3}$$

**重要极限 2** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

**例 5** 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$.

**解:** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\dfrac{1}{x})^x\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x\right]^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$

**例 6** 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$.

**解:** $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{-x\to 0}\{[1+(-x)]^{(\frac{1}{-x})}\}^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$

**例 7** 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

**解:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\mathrm{e}=1$

**例 8** 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$.

**解:** 令 $u=\mathrm{e}^x-1$，则 $x=\ln(1+u)$，当 $x\to 0$ 时 $u\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}=1$$

**例 9** 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^{x+2}$.

**解法 1:** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{3}{x}}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left[\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-2}}{\left[\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{-3}}=\dfrac{e^{-2}}{e^{-3}}=e$

**解法 2:** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{x-3}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{5}\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^{x-3}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^{5}=e\cdot 1=e$$

**例 10** 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

**解:** 利用 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 计算本题时需适当变形,并利用复合函数的极限法则.

因为 $(1+x)^{\frac{2}{\sin x}}=\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{2x}{\sin x}}$, 则

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{2x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}}=e^{2}$$

## 习题 1-6

1. 计算下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\omega x}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 4x}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan 5x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}3^{n}\sin\dfrac{x}{3^{n}}$(常数 $x\neq 0$);

(7) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

(8) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$.

2. 计算下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{2}{x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^{2x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-1}\right)^{x+1}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}$;

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(h+x)-\ln h}{x}(h>0)$.

## 第七节　无穷小量的比较

大家已经知道，有限个无穷小量的和、差、积依然是无穷小量，而两个无穷小量的商却存在不同的情况．例如，当 $x \to 0$ 时，$3x$，$x^2$，$\sin x$ 都是无穷小量，而 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{3x} = 0$，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{x^2} = \infty$，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$．本节将专门讨论无穷小量的比较，这不仅在今后的学习中会一再涉及，而且在某些场合下，它将为极限计算提供比较简捷的途径．

**定义 1**　设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是在自变量同一变化过程中的无穷小量，且 $\alpha(x) \neq 0$，而 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 也是在这个变化过程中的极限．

(1) 如果 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$，称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小量，记作 $\beta(x) = o(\alpha(x))$，在 $\beta(x) \neq 0$ 时也称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小量．

(2)如果 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C(C \neq 0)$，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小量．

(3)如果 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小量，记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ 或 $\beta(x) \sim \alpha(x)$．

显然，等价无穷小量是同阶无穷小量的特殊情形，即 $C = 1$ 的情形．

例如，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sin x} = 0$，所以当 $x \to 0$ 时，$x^2$ 是 $\sin x$ 的高阶无穷小量，即 $x^2 = o(\sin x)$．

又如，当 $x \to 0$ 时，$\sin x$ 和 $5x$ 都是无穷小量，且因为 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{5x} = \dfrac{1}{5}$，所以，当 $x \to 0$ 时，$\sin x$ 和 $5x$ 是同阶无穷小量．

又如，因为当 $x \to 0$ 时，$x$，$\sin x$，$\tan x$，$1 - \cos x$，$\ln(1 + x)$ 等都是无穷小量，并且

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1, \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

所以，当 $x \to 0$ 时，$\sin x$ 与 $x$，$\tan x$ 与 $x$，$1 - \cos x$ 与 $\dfrac{1}{2}x^2$，$\ln(1 + x)$ 与 $x$ 都是等价无穷小量，即

$$x \sim \sin x, x \sim \tan x, \frac{1}{2}x^2 \sim 1 - \cos x, x \sim \ln(1 + x)$$

还可以用类似的方法证明，当 $x \to 0$ 时，$x$ 与 $e^x - 1$，$2x$ 与 $(1+x)^2 - 1$，$x$ 与 $\arcsin x$，$x$ 与 $\arctan x$ 都是等价无穷小量，即

$$x \sim e^x - 1, 2x \sim (1+x)^2 - 1, x \sim \arcsin x, x \sim \arctan x$$

综上可得，常见的等价无穷小量有(当 $x \to 0$ 时)：

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1;$$

$$\frac{x^2}{2} \sim 1 - \cos x; \quad \alpha x \sim (1+x)^\alpha - 1 (\alpha \neq 0).$$

两个无穷小量之比的极限的各种不同情况反映了不同的无穷小量趋于零的“快慢”程度，即在自变量的同一趋向下，可以将同阶无穷小量趋向于 0 的快慢想象成一种“倍数”关系，等价无穷小量是指它们趋向于 0 的速度“相同”；若 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量，则意味着 $\alpha(x)$ 比 $\beta(x)$ 趋向于 0 的速度要快得多 .

注：并非任何两个无穷小量都可以加以比较的 . 例如，当 $x \to 0$ 时，$x\sin\frac{1}{x}$ 和 $x$ 都是无穷小量，但是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，所以这两个无穷小量是不可以比较的，即它们之间不存在同阶或高阶的关系 .

**定理 1** 若 $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$，$\beta(x) \sim \beta_1(x)$，$\lim\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ 存在(或为无穷大)，则 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 也存在(或为无穷大)，并且

$$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \quad \text{或} \quad \lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$$

定理表明，求两个无穷小量之比的极限时，分子及分母都可用等价无穷小量代替 .

注：做等价无穷小量替换时，在分子或分母为和式时，通常不能用和式中的某一项或若干项作等价无穷小量替换 . 若分子或分母为几个因子的积，则可将其中某个或某些因子以等价无穷小量替换 .

**例 1** 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$.

**解**：因为当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+x) \sim x$，$e^x - 1 \sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

**例 2** 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{3x}$.

**解**：因为当 $x \to 0$ 时，$\tan 5x \sim 5x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$$

**例 3**　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

**解**:因为当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sin x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x}=\frac{1}{2}$$

**例 4**　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

**解**: 
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\\&=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

**例 5**　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}$.

**解**: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(x^2+3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+3}=\dfrac{1}{3}$

## 习题 1-7

1. 当 $x\to 0$ 时，$e^{2x}-1$ 是 $\sin x$ 的______无穷小量；$1-\cos x$ 是 $x$ 的______无穷小量.

当 $x\to 1$ 时，$1-x$ 是 $1-x^3$ 的______无穷小量；$1-x$ 是 $\dfrac{1}{2}(1-x^2)$ 的______无穷小量.

当 $x\to 0^+$ 时，$x$ 是 $e^{\sqrt{x}}-1$ 的______无穷小量.

2. 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos^2 x$ 与 $a\sin^2\dfrac{x}{2}$ 为等价无穷小量，则 $a=$______；

$ax^b$ 与 $\tan x-\sin x$ 为等价无穷小量，则 $a=$______，$b=$______.

3. 利用等价无穷小量计算下列各题的极限．

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan mx}{\sin nx}(n\neq 0)$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}(m\neq 0)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{\sin x}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{\sqrt{1+x^2}-1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$； (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{e^x-1}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\ln(1+x^3)}$； (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)\sin x}{1-\cos x}$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln(n+1)-\ln n]$； (10) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(1-\cos\dfrac{1}{x})$．

# 第八节 函数的连续性与间断点

## 一、函数的连续性

自然界中有许多现象，如河水的流动、气温的变化、植物的生长等，都是连续地变化着的，这种现象反映在函数关系上就是函数的连续性．连续性是函数的重要性质之一，它不仅是函数研究的重要内容，也为计算极限开辟了新途径，本节将运用极限的概念对它加以描述和研究，并在此基础上解决更多的极限计算问题．

设函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个邻域内有定义，当自变量从 $x_0$ 变到 $x$ 时，相应的函数值从 $f(x_0)$ 变到 $f(x)$，则称 $x-x_0$ 为自变量的改变量(或称增量)，记作 $\Delta x=x-x_0$，它可正可负；称 $f(x)-f(x_0)$ 为函数的改变量，记作 $\Delta y$，即

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)\quad\text{或}\quad\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

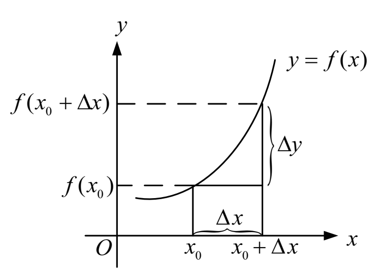


图 1-3

在几何上，函数的改变量 $\Delta y$ 表示当自变量从 $x_0$ 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数上相应点的纵坐标的改变量，如图 1-3 所示．

**例 1** 求函数 $y=x^2$，当 $x_0=1$，$\Delta x=0.1$ 时的改变量．

**解：** $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(1+0.1)-f(1)=1.1^2-1^2=0.21$

**1. 函数在点 $x_0$ 的连续性**

**定义 1**　设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个邻域内有定义,如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0 \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续.

**例 2**　证明函数 $f(x)=x^2-1$ 在 $x_0=1$ 处的连续性.

**证:**　因为 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0=f(1)$,所以 $f(x)=x^2-1$ 在 $x_0=1$ 处连续.

有时需要考虑函数在某点 $x_0$ 一侧的连续性,由此引进左、右连续的概念.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处左连续;如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处右连续.

函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处左连续、右连续、连续之间的关系有如下定理.

**定理 1**　函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续的充分必要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处左连续且右连续.

**例 3**　试确定 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leqslant 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

**解:**因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\cos x=1, \qquad \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2x+1)=1$$

且 $f(0)=1$,即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左、右连续,所以它在 $x=0$ 处连续.

**例 4**　设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{x}+2, & x<0\\ \ln(1+x)+x-4, & x\geqslant 0\end{cases}$,试问 $a$ 为何值时,函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续?

**解:**由连续性定义,要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,必须 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=-4$.

而

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin ax}{x}+2\right)=a+2$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}[\ln(1+x)+x-4]=-4$$

所以 $a+2=-4$,故 $a=-6$.

**2. 函数在区间上的连续性**

如果函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 内每一点都连续,则称 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内连续. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内连续,且在 $x=a$ 处右连续,又在 $x=b$ 处左连续,则称函数 $f(x)$

在闭区间 $[a,b]$ 上连续．函数的全体连续点构成的区间称为函数的连续区间．在连续区间上，连续函数的图形是一条连绵不断的曲线．

**例 5** 证明函数 $y = a^x(a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内连续．

**证：** 任取 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$，则有

$$\lim_{x \to x_0} a^x = \lim_{\Delta x \to 0} a^{x_0 + \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(a^{x_0} \cdot a^{\Delta x}) = a^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} = a^{x_0}$$

因此 $y = f(x)$ 在 $x_0$ 处连续．由 $x_0$ 的任意性可知，它在其定义域内连续．

### 3. 初等函数的连续性

函数的连续性是通过极限来定义的，因此由极限运算法则和连续定义可得下列连续函数的运算法则．

**定理 2（连续函数的四则运算法则）** 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 均在点 $x_0$ 处连续，则 $f(x) \pm g(x)$，$f(x) \cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0)$ 都在点 $x_0$ 处连续．

定理 2 表明，连续函数的和、差、积、商（分母不为 0）都是连续函数．

**定理 3（反函数的连续性）** 单调连续函数的反函数在其对应区间上也是单调连续的．应用函数连续的定义与上述两个定理，可以证明基本初等函数在其定义域内都是连续的．

**定理 4（复合函数的连续性）** 设函数 $y = f(u)$ 在点 $u_0$ 处连续，又函数 $u = \varphi(x)$ 在点 $x_0$ 处连续，且 $u_0 = \varphi(x_0)$，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 $x_0$ 处连续．

因为初等函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而构成，根据上述定理可得如下定理．

**定理 5** 初等函数在其定义区间内是连续的．

利用初等函数的连续性结论可得：

如果 $f(x)$ 是初等函数，且点 $x_0$ 在 $f(x)$ 的定义区间内，那么 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$．因此计算 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，只要计算对应的函数值 $f(x_0)$ 就可以了．

例如，$x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ 是初等函数 $y = \ln\sin x$ 的定义区间 $(0, \pi)$ 内的点，所以

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln\sin x = \ln\sin\frac{\pi}{2} = \ln 1 = 0$$

## 二、函数的间断点

当函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某去心邻域内有定义，如果 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处不连续，称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处间断，$x_0$ 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点．

由函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处连续的定义可知，如果 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处满足下列 3 个条件中的任何一个，则点 $x_0$ 是 $f(x)$ 的一个间断点：

(1)函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处没有定义；

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；

(3) $f(x)$ 在点 $x_0$ 处有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

下面讨论间断点的分类：

设 $x_0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点，则

(1)如果单侧极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在，则 $x_0$ 称为第一类间断点 .

当 $x_0$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点时：

① 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$，也即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则 $x_0$ 称为可去间断点；

② 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$，则 $x_0$ 称为跳跃间断点 .

(2)如果 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 中有一个不存在，则 $x_0$ 称为第二类间断点 .

**例 6**　设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，试问 $x = 0$ 是否为间断点；若是，则判断间断点的类型 .

**解：**因为 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$，即该函数在 $x = 0$ 处的左、右极限存在，但是由于 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$，$f(0) = 0$，则

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$$

因此 $x = 0$ 是该函数的可去间断点 .

**例 7**　求函数 $f(x) = \dfrac{-x}{|x|}$ 的间断点，并指出其类型 .

**解：**因为该函数在 $x = 0$ 处没有定义，所以 $x = 0$ 是它的间断点，又因为

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{-x} = 1, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{-x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

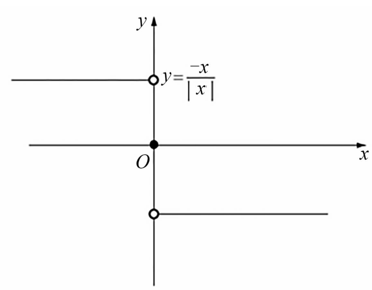



图 1-4

所以 $x = 0$ 为该函数的第一类间断点，且为跳跃间断点，如图 1-4 所示 .

**例 8** 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 的间断点,并指出其类型.

**解:**因为该函数在 $x=1$ 处无定义,所以 $x=1$ 是它的间断点;又因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$,所以 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

## 三、闭区间上连续函数的性质

前面介绍了函数在区间上连续的概念,在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 有一些重要的特性,下面将不加以证明地予以介绍.

**定理 6(最大值和最小值定理)** 在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值 $M$ 和最小值 $m$.

**定理 7(有界性定理)** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则它在 $[a,b]$ 上有界.

这就是说,若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则存在一个正数 $M$,对 $[a,b]$ 中的一切 $x$,都有 $|f(x)|\leqslant M$.

**定理 8(介值定理)** 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$,那么,对于 $A$ 和 $B$ 之间的任意一个数 $C$,在开区间 $(a,b)$ 内至少有一点 $\xi$,使得 $f(\xi)=C(a<\xi<b)$.

定理 8 的几何意义是,在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 的图象是从点 $(a,f(a))$ 到点 $(b,f(b))$ 之间不间断的一条曲线,因此,对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一数 $f(x)$,直线 $y=C$ 一定与 $f(x)$ 的图象至少相交于某一点,该交点的横坐标为 $\xi$,则有 $f(\xi)=C$,如图 1-5 所示.

**推论** 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则它在 $[a,b]$ 内能取得介于其最小值 $m$ 和最大值 $M$ 之间的任何数.

设 $m=f(x_1)$,$M=f(x_2)$,而 $m\neq M$,在闭区间 $[x_1,x_2]$(或 $[x_2,x_1]$)上应用介值定理,即可得上述推论.

**定理 9(零点定理)** 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则至少存在一个 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

定理 9 的几何意义是:连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 的端点处的函数值异号,则点 $P(a,f(a))$ 与点 $Q(b,f(b))$ 之间的图形必与 $Ox$ 轴相交,如图 1-6 所示.

**例 9** 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

**证:**设 $f(x)=x^3-4x^2+1$. 因为由于它在 $[0,1]$ 上连续且 $f(0)=1>0$,$f(1)=-2<0$,由定理 9 可知,至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=0$,从而表明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

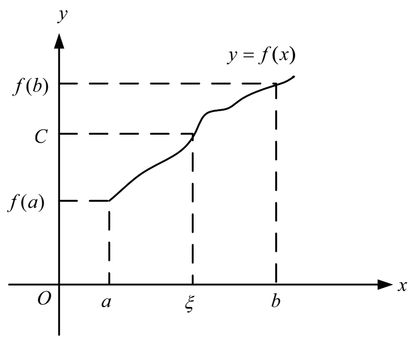



图 1-5

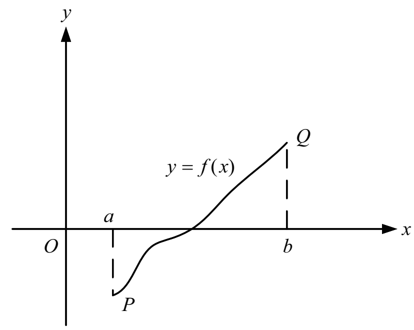



图 1-6

## 习题 1-8

1. 求函数 $y=x^2-1$，当 $x_0=1,\Delta x=0.5$ 时的改变量 $\Delta y$.

2. 求下列函数的连续区间，并求其极限.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2-3x+2}}$，并求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$；

(2) $f(x)=\ln(1-x)$，并求 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$；

(3) $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$，并求 $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$；

(4) $f(x)=\ln\arcsin x$，并求 $\lim\limits_{x\to \frac{\sqrt{2}}{2}}f(x)$.

3. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ 4, & x=0 \\ 1+x, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 及 $x=1$ 处的连续性.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin x, & x<0 \\ k, & x=0 \\ x\sin\dfrac{1}{x}+1, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，试求 $k$ 的值.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-1}, & x<-1 \\ b, & x=-1 \\ a+\arccos x, & -1<x\leqslant 1 \end{cases}$ 在 $x=-1$ 处连续，试求 $a,b$ 的值.

6. 求下列函数的间断点，并判断其类型.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；

(2) $f(x)=\dfrac{x}{(x+2)^3}$；

(3) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2+x-6}$；

(4) $f(x)=\begin{cases}x-3, x\leqslant 1\\ 1-x, x>1\end{cases}$；

(5) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$；

(6) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

7. 证明：五次代数方程 $x^5-5x=1$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个根．

8. 证明：方程 $x+e^x=0$ 在区间 $(-1,1)$ 内有唯一的根．