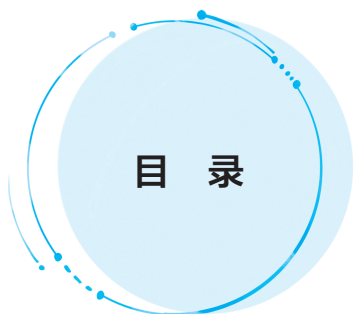




第1章 数与代数	1
1.1 数的整除性	3
1.2 奇偶性问题	6
1.3 分解质因数	10
1.4 约数与倍数	14
1.5 余数与同余	19
1.6 二进制与其他进制	22
1.7 数字谜——找规律	25
1.8 数字谜——幻方与数阵	31
1.9 数字谜——横式谜	38
1.10 数字谜——竖式谜	41
1.11 凑整法	45
1.12 头同尾合十和尾同头合十的巧算	46
1.13 铺地锦	47
1.14 估算法	48
1.15 裂项法	50
第2章 空间与图形	53
2.1 平面图形的计数问题	55
2.2 平面图形的长度和角度	62
2.3 平面图形的面积	68
2.4 立体图形的表面积与体积	79
2.5 截面、展开图和三视图	82
2.6 最短路线问题	87
2.7 “拼多多”	93
第3章 综合与实践问题	99
3.1 平均数问题	101



3.2 和倍类问题	103
3.3 差倍类问题	105
3.4 和差类问题	107
3.5 年龄问题	109
3.6 植树问题	112
3.7 行程问题	114
3.8 相遇与相距问题	117
3.9 追及问题	122
3.10 分数与百分数问题	125
3.11 比与比例问题	129
3.12 盈亏问题	132
3.13 还原问题	134
3.14 工程问题	135
3.15 逻辑问题	141
第4章 数学名题选讲	147
4.1 哥尼斯堡七桥问题	149
4.2 斐波那契兔子数列	153
4.3 “牛吃草”问题	157
4.4 中国剩余定理	160
4.5 一次丢番图方程	165
4.6 抽屉原理	168
4.7 鸡兔同笼问题	170
参考答案	173



第2章 空间与图形



思政小课堂

2.1 平面图形的计数问题

2.1.1 主要理论

计数也叫数数. 平面图形的计数包括数线段的条数、角的个数以及长方形、正方形、三角形、圆形、平行四边形和梯形等平面图形的个数. 在计数时, 我们可以逐个计数, 也可以分类计数, 还可以分步骤计数等. 总之, 要根据被数的图形的特征, 运用有关的原则和方法, 做到既不遗漏也不重复, 从而得到正确的计数结果.

1. 定理一: 加法原理

如果完成一件事情有 n 类办法, 在第一类办法中有 m_1 种方法, 在第二类办法中有 m_2 种方法……在第 n 类办法中有 m_n 种方法, 那么, 完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法.

运用加法原理来计数的方法叫作分类计数法.

2. 定理二: 乘法原理

如果完成一件事情需要分成 n 个步骤, 做第一步有 m_1 种方法, 做完第一步后做第二步有 m_2 种方法……最后做第 n 步有 m_n 种方法, 那么, 按照这样的步骤完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种不同的方法.

运用乘法原理来计数的方法叫作分步计数法.

3. 定理三: 容斥原理

先不考虑重叠的情况, 把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来, 然后再减去重复计算的数目, 使得计算的结果既无遗漏又无重复. 这种计数的方法称为容斥原理.

容斥原理可用集合的方法表示, 设 S 是有限集, $A, B, C \subseteq S$, 则

$$(1) |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$$(2) |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

2.1.2 实例分享

例 2-1 图 2-1 中共有多少个角?

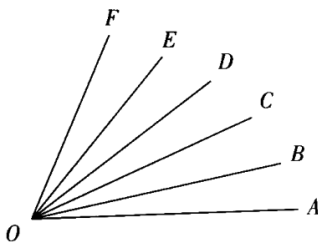


图 2-1

分析与解答

方法一：直接法。

按角的顺序数，直接列举图2-1中的角。

OA 与 OB 形成 $\angle AOB$ 。

OA 与 OC 形成 $\angle AOC$ ， OB 与 OC 形成 $\angle BOC$ 。

OA 与 OD 形成 $\angle AOD$ ， OB 与 OD 形成 $\angle BOD$ ， OC 与 OD 形成 $\angle COD$ 。

OA 与 OE 形成 $\angle AOE$ ， OB 与 OE 形成 $\angle BOE$ ， OC 与 OE 形成 $\angle COE$ ， OD 与 OE 形成 $\angle DOE$ 。

OA 与 OF 形成 $\angle AOF$ ， OB 与 OF 形成 $\angle BOF$ ， OC 与 OF 形成 $\angle COF$ ， OD 与 OF 形成 $\angle DOF$ ， OE 与 OF 形成 $\angle EOF$ 。

因此，图中共有15个角。

方法二：化归法。

采用化归法计数时一边计数，一边减少线条。

先数以 OA 为一边的角有5个： $\angle AOB$ 、 $\angle AOC$ 、 $\angle AOD$ 、 $\angle AOE$ 、 $\angle AOF$ 。然后把 OA 抹去。

再数以 OB 为一边的角有4个，数后将 OB 抹去。以下类推。

最后，只剩下了两条射线 OE 、 OF ，有1个角： $\angle EOF$ 。

因此，图中共有角 $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ (个)。

方法三：递推法。

设想构成角的射线是逐条填上去的，可统计每添加一条射线所新构成的角的个数。

对于 OA 、 OB 两条射线，只有1个角： $\angle AOB$ 。

当填上第3条射线 OC 时，图中增加了2个角： $\angle AOC$ 、 $\angle BOC$ 。以下类推。

最后，当填上第6条射线 OF 时，图中增加了5个角： $\angle AOF$ 、 $\angle BOF$ 、 $\angle COF$ 、 $\angle DOF$ 、 $\angle EOF$ 。

故图中共有角 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ (个)。

方法四：分类计数法。

图中有基本角5个： $\angle AOB$ 、 $\angle BOC$ 、 $\angle COD$ 、 $\angle DOE$ 、 $\angle EOF$ 。

由两个相邻的基本角构成的角有4个： $\angle AOC$ 、 $\angle BOD$ 、 $\angle COE$ 、 $\angle DOF$ 。以下类推。

由5个基本角构成的角有1个： $\angle AOF$ 。

故图中共有角 $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ (个)。

一般地，如果图形中有基本角 n 个，那么由它们所形成的角共有

$$n + (n - 1) + \cdots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n + 1)}{2} \text{ (个)}.$$

例2-2 用火柴棒摆出边长的火柴棒根数为 $n = 1, 2, 3, 4$ 的三角形如图2-2所示，当 $n = 2017$ 时，共有多少个小三角形？

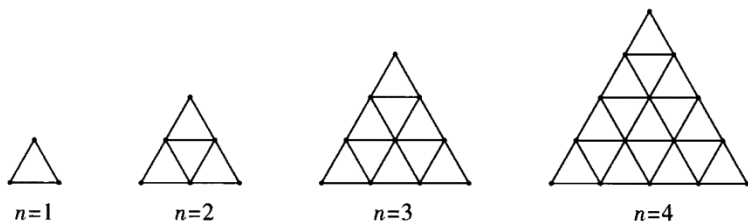


图2-2

分析与解答

方法一:采用分组相加法.

当 $n=2$ 时,共有2层小三角形,从上往下数,第一层有1个小三角形,第二层有3个小三角形,故共有小三角形 $1+3=4$ (个).

当 $n=3$ 时,共有3层小三角形,从上往下数,各层的小三角形个数分别为1、3、5,故共有小三角形 $1+3+5=9$ (个).

当 $n=4$ 时,共有4层小三角形,从上往下数,各层的小三角形个数分别为1、3、5、7,故共有小三角形 $1+3+5+7=16$ (个).

通过观察发现,从上往下数,除了第一层,下面每一层都比其上一层多2个小三角形,按此规律可知,边长为 n 时的三角形共有 n 层,从上往下数,每一层分别有1、3、5、7、 $\cdots$ 、 $(2n-1)$ 个小三角形,故共有小三角形

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2(\text{个}).$$

因此,当 $n=2017$ 时,共有小三角形 2017^2 个.

方法二:归纳法.

观察图2-2,摆出的三角形其边长的火柴棒根数 n 与其所含的小三角形的个数的关系见表2-1.

表2-1 n 与小三角形个数的关系

n	1	2	3	4
小三角形个数	1	4	9	16

由上表可找到这样的规律:摆出的三角形所含的小三角形的个数为其边长火柴棒根数的平方.因此,当 $n=2017$ 时,共有小三角形 2017^2 个.

方法三:采用几何法.

设边长的火柴棒根数为 n 时的三角形共有 n_1 个小三角形,每个小三角形的面积为 S ,则由等边三角形面积与边长的比例关系可得 $\frac{S}{n_1 S} = \frac{1^2}{n^2}$,于是有 $n_1 = n^2$.因此,当 $n=2017$ 时,共有 2017^2 个小三角形.

例2-3 图2-3中共有多少个三角形?

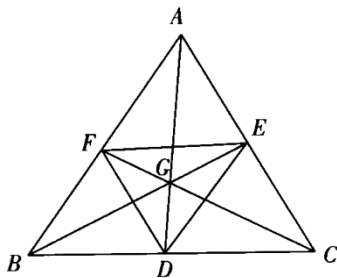


图2-3

分析与解答

(1)以图2-3中所有三角形的集合作为全集 I .



(2) 设 P 、 U 、 V 分别表示以点 A 、 B 、 C 为其中一个顶点的三角形的集合.

当以点 A 为其中一个顶点时, 若另两个顶点:

① 分别在 AB 、 AC 上, 则有 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABE$ 、 $\triangle AEF$ 、 $\triangle ACF$ 4 个三角形;

② 分别在 AB 、 AD 上, 则有 5 个三角形;

③ 分别在 AD 、 AC 上, 则有 5 个三角形.

所以集合 P 有 14 个三角形. 同理, 集合 U 、 V 也各有 14 个三角形.

(3) P 、 U 、 V 三个集合中两两的交集所包含的三角形, 分别以 A 和 B 、 A 和 C 、 B 和 C 为顶点, 因此, 各有 4 个.

(4) P 、 U 、 V 三个集合的交集, 也就是以 A 、 B 、 C 为顶点的三角形的集合, 只有一个三角形 $\triangle ABC$.

(5) 图 2-4 表示上述集合 P 、 U 、 V 及全集 I . 矩形内 3 个圆外的平面部分表示不以 A 、 B 、 C 为顶点的三角形的集合. 这样的三角形全在 $\triangle DEF$ 内, 共有 16 个.

故图 2-3 中共有三角形 $14 \times 3 - 4 \times 3 + 1 + 16 = 47$ (个).

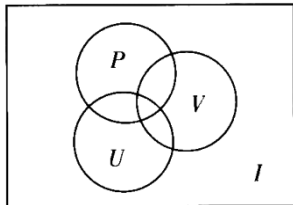


图 2-4

例 2-4 图 2-5 中共有多少个正方形?

分析与解答

方法一: 以被数的正方形的左上角顶点分类计数.

因为每个正方形的左上角的顶点都是图中两组平行线的某个交点, 所以统计以每个点为左上角顶点的正方形的个数, 并把这个数记在该点右下方的空格内, 结果如图 2-6 所示. 因此, 正方形的总数是

$$5 \times 1 + 4 \times 3 + 3 \times 5 + 2 \times 7 + 1 \times 9 = 55 \text{ (个)}.$$

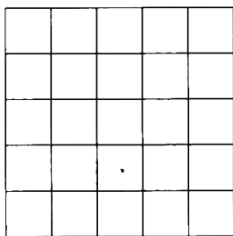


图 2-5

5	4	3	2	1
4	4	3	2	1
3	3	3	2	1
2	2	2	2	1
1	1	1	1	1

图 2-6

方法二: 设小正方形的边长为 1, 按边长的大小把图中出现的正方形分为五类计数.

第一类: 边长为 1 的正方形, 也就是图中的基本图形, 一行有 5 个, 共 5 行, 则共有 $5 \times 5 = 25$ (个).

第二类:边长为2的正方形,一行有4个,共4行,则共有 $4 \times 4 = 16$ (个).

第三类:边长为3的正方形,一行有3个,共3行,则共有 $3 \times 3 = 9$ (个).

第四类:边长为4的正方形,一行有2个,共2行,则共有 $2 \times 2 = 4$ (个).

第五类:边长为5的正方形,只有 $1 \times 1 = 1$ (个).

所以,正方形的总个数为 $5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 55$ (个).

一般地,任意一个由 $n \times n$ 个基本的小正方形拼成的大正方形中,正方形的总个数为

$$n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ (个)}.$$

特别地,一个由 $n \times m$ ($n < m$) 个基本的小正方形组成的图形中,正方形的总个数为

$$n \times m + (n-1) \times (m-1) + \cdots + 1 \times (m-n+1) = \frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6} \text{ (个)}.$$

例2-5 图2-7中共有多少个长方形?

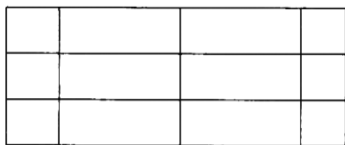


图2-7

分析与解答

一个长方形有其对应的长和宽,因此,可通过确定长方形的相邻两边来计数图中的长方形.

从横向看,长方形的长边上共有线段 $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ (条). 从纵向看,长方形的宽边上共有线段 $3 + 2 + 1 = 6$ (条).

于是,利用乘法原理可得图中长方形的总个数为 $10 \times 6 = 60$ (个).

一般地,计算长方形的个数,可按如下规律:

长方形的个数 = 长边的线段数 $\times$ 宽边的线段数.

例2-6 在 8×8 的方格棋盘上取出两个小方格,这两个小方格构成的图形如图2-8所示,它们有一个公共顶点,共有多少种不同的取法?

分析与解答

每一种取法,都有一个点与它对应,这个点就是所取的两个小方格的公共顶点,它是棋盘上不在边界上的横线与竖线的交点. 在 8×8 的棋盘里,这样的交点共有 $7 \times 7 = 49$ (个). 如图2-9所示,每一个这样的点实际上对应两种不同的取法. 所以,在 8×8 的方格棋盘上取出如图2-8所示的图形,共有 $49 \times 2 = 98$ (种)不同的取法.



图2-8

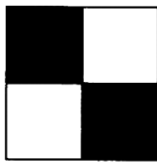


图2-9

实战演练

1. 图2-10中各有多少条线段?

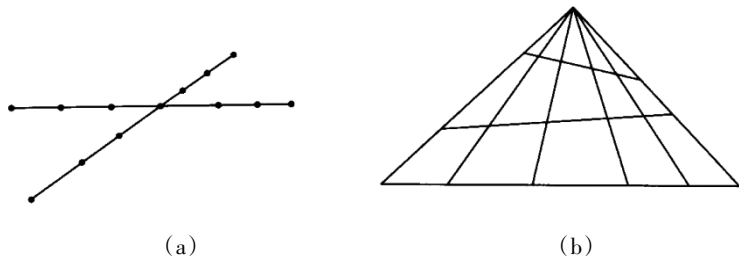


图2-10

2. 图2-11中有多少个三角形?
 3. 图2-12中直线 m 上有4个点,直线 n 上有5个点,以这些点为顶点可以构成多少个三角形?

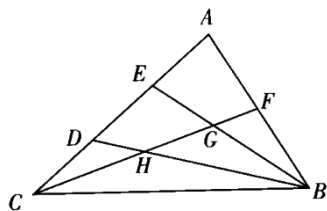


图2-11

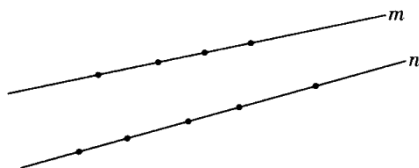


图2-12

4. 图2-13中三角形里有多少个内角?
 5. 平面上有16个点,排成一个正方形. 每行、每列上相邻两点的距离都相等,如图2-14所示. 在每个点上钉上钉子,以这些点为顶点,用线将它们围起来,一共可围成多少个正方形?

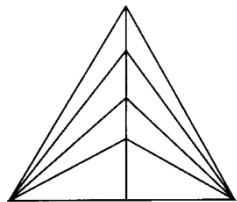


图2-13

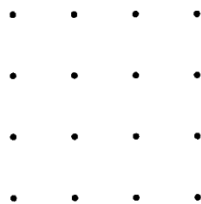
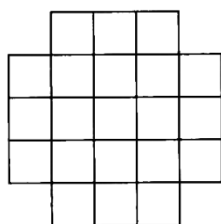
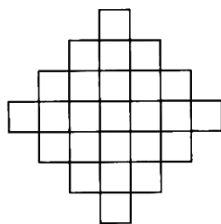


图2-14

6. 图2-15(a)、(b)中分别有多少个正方形?



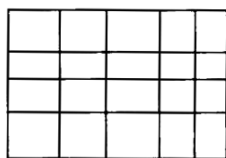
(a)



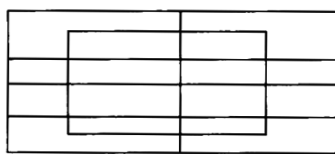
(b)

图2-15

7. 图2-16(a)、(b)中分别有多少个长方形?
8. 图2-17中有多少个正方形? 有多少个长、宽不等的长方形?(小格都为正方形)



(a)



(b)

图2-16

9. (1) 同一平面内的7条直线最多有多少个交点?(2) 同一平面内的7条直线最多能将平面分为多少个部分?

10. 图2-18是某个地区的纵横各有5条街道的平面图, 现某人要从路口A前往路口B, 走的方向只能向右或向下, 一共有多少种不同的走法?

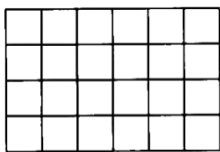


图2-17

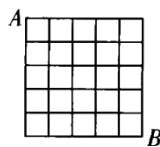


图2-18

11. 如图2-19所示, 从 5×6 的方格图中, 取出由3个方格组成的“L”形, 有多少种不同的取法?
12. 如图2-20所示, 在 8×8 的方格棋盘上剪下由4个方格组成的“凸”字形, 有多少种不同的剪法?

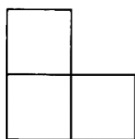


图2-19

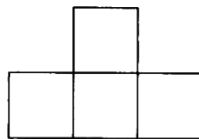


图2-20



2.2 平面图形的长度和角度

2.2.1 主要理论

长度和角度的计算,一般需要对它们所在图形的形状、位置、大小等特点进行分析,注意利用一些相关量之间的关系,寻求恰当的方法.

2.2.1 实例分享

例2-7 图2-21是由 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 、 g 、 h 8条线段围成的封闭图形,相邻的边都互相垂直.要求出图形的周长,至少要知道图中几条线段的长度?

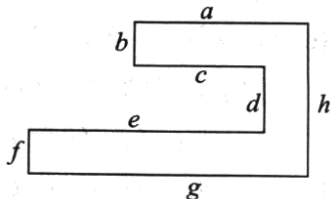


图2-21

分析与解答

利用“长方形对边相等”,通过平行移动,可得

$$b + d + f = h$$

$$a + e = g + c$$

图形的周长为 $a + b + c + d + e + f + g + h = 2h + 2g + 2c$,因此,知道三条线段 h 、 g 、 c (或者 h 、 a 、 e)的长,就可以求出图形的周长.

例2-8 图2-22是一卷紧紧缠绕在一起的牛皮纸卷,纸卷直径为20厘米,中间有一直径为6厘米的卷轴.已知纸的厚度为0.04厘米,试求这卷纸展开后大约有多长.

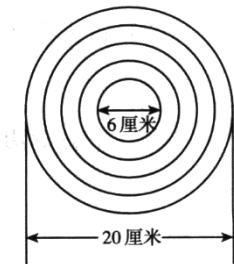


图2-22

分析与解答

纸卷展开后,它的侧面可以近似地看作一个长方形,它的长就是纸卷长,宽是纸的厚度,它的

面积就是纸卷端面圆环的面积.

$$\text{纸的长度} \approx \frac{\text{纸卷圆环面积}}{\text{纸的厚度}}$$

$$= \frac{3.14 \times (10^2 - 3^2)}{0.04}$$

$$= 7\,143.5 (\text{厘米})$$

答:这卷纸展开后长约7 143.5厘米.

例2-9 一块围起来的长方形试验田,面积为 24×52 平方米,一位农业科学家用1994米长的平行于整块田边的篱笆作为内篱笆,将这块田分割成全等的正方形试验田,恰好把整块田分完.问这块试验田最多可以分割成多少块正方形试验田(篱笆可以不用完)?

分析与解答

整块试验田的长和宽都是所分成的小正方形试验田边长的倍数,要在所用的内篱笆总长不超过1994米的条件下使分成的小正方形试验田的块数最多.

要求内篱笆总长,必须求出所分割的小正方形的边长和分割的个数,小正方形边长的最大值是 $(24, 52) = 4$ (米),如继续分割,可得边长为2米、 $\frac{4}{3}$ 米、1米……的更小的正方形,如图2-23所示.

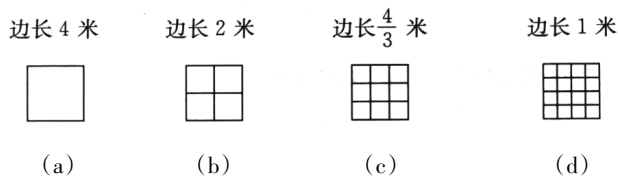


图2-23

计算如下:

(1) 正方形边长为4米时,内篱笆总长为 $52 \times (6 - 1) + 24 \times (13 - 1) = 548$ (米).

(2) 正方形边长为2米时,内篱笆总长为 $52 \times (5 + 6) + 24 \times (12 + 13) = 1\,172$ (米).

(3) 正方形边长为 $\frac{4}{3}$ 米时,内篱笆总长为 $52 \times (11 + 6) + 24 \times (25 + 13) = 1\,796$ (米).

(4) 正方形边长为1米时,内篱笆总长为 $52 \times (17 + 6) + 24 \times (38 + 13) = 2\,420 > 1994$ (米).

$$\text{又 } \frac{24}{4} \times \frac{52}{4} = 702$$

答:这块试验田用不超过1994米的篱笆最多可分割成702个全等的正方形小试验田.

例2-10 图2-24的五角星中, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$ 的和是多少度?



图 2-24

分析与解答

$\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 、 $\angle 5$ 在不同的三角形中,利用三角形外角定理——三角形的外角等于不相邻的两内角的和,可以将5个角代换到一个三角形中,再由三角形内角和定理计算.

由三角形外角定理可得

$$\angle 7 = \angle 2 + \angle 5, \angle 6 = \angle 3 + \angle 7$$

因此, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$

$$= \angle 1 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 7$$

$$= \angle 1 + \angle 4 + \angle 6$$

$$= 180^\circ$$

答:五角星的5个角之和是 180° .

例 2-11 如图 2-25 所示,在三角形 ABC 中, D 、 E 是边 BC 上的点, $BD = AB$, $CE = AC$, 又 $\angle DAE = \frac{1}{3}\angle BAC$. 求 $\angle BAC$ 的度数.

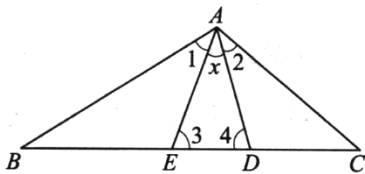


图 2-25

分析与解答

设 $\angle DAE$ 的度数为 x , 则 $\angle BAC$ 的度数为 $3x$.

$$\because BD = AB$$

$$\therefore \angle 1 + x = \angle 4$$

$$\because CE = AC$$

$$\therefore \angle 2 + x = \angle 3$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + 2x = \angle 3 + \angle 4$$

$$\text{又} \because \angle 1 + \angle 2 = 3x - x$$

$$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ - x$$

$$\therefore 2x + 2x = 180^\circ - x$$

可得 $x = 36^\circ$, 即 $\angle BAC = 108^\circ$

答: $\angle BAC = 108^\circ$.

例2-12 半径为25厘米的小铁环沿着半径为50厘米的大铁环的内侧做无滑动的滚动,当小铁环沿大铁环滚动一周回到原位时,问小铁环自转了几圈?

分析与解答

如图2-26,半径为 r 的铁环在直线 l 上做无滑动的滚动.当铁环的圆心移动的路程等于圆周长 $2\pi r$ 时,铁环自转一周.本题中小铁环在大铁环内滚动,如图2-27所示,同样是圆心 O 移动的路程是圆周长的几倍,小铁环就自转几圈.设小铁环半径为 r ,大铁环半径为 R ,则小铁环自转的圈数为

$$\frac{2\pi(R-r)}{2\pi r} = \frac{R}{r} - 1$$

$$\text{即 } \frac{2\pi(50-25)}{2\pi \cdot 25} = 1$$

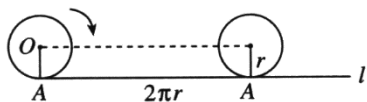


图2-26

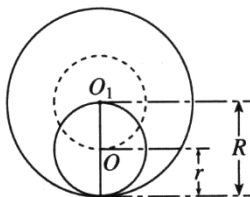


图2-27

答:小铁环自转了1圈.

例2-13 8个相同的圆中有7个不动,摆成如图2-28所示的式样,另一个圆的圆心开始位于点A,然后沿7个不动的圆滚动.问当动圆回到它原来的位置时,共自转了几圈?

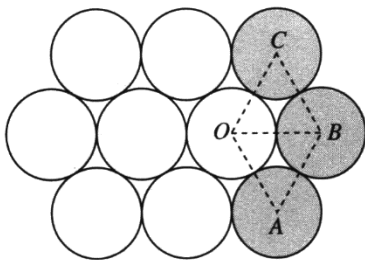


图2-28

分析与解答

设动圆的圆心在滚动时依次经过 A 、 B 、 C 等位置,先考虑 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 的过程,这时动圆圆心走过了它所走路程的六分之一.

$$\because \angle AOB = 60^\circ \text{ 且 } \angle BOC = 60^\circ$$

$$\therefore \angle AOC = 120^\circ$$

设圆的半径为1,则 $OA = OC = OB = 2$,所以 $\widehat{ABC}$ 的长是半径为2的圆上的 $\frac{1}{3}$ 圆周长,也就是半径为1的圆上的 $\frac{2}{3}$ 圆周长.

因此,动圆回到原来的位置时,圆心经过的路程是 $\frac{2}{3} \times 6 = 4$ (圆周长).

答:动圆回到原来的位置时,共自转了4圈.

实战演练

1. 如图2-29所示,图(a)中的小方格和图(b)中的小方格相同,图(a)的周长为48厘米,求图(b)的周长.

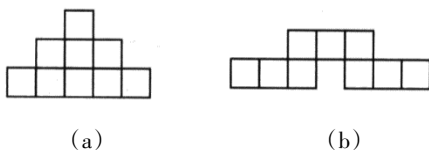


图2-29

2. 如图2-30是由6个正方形重叠起来的,正方形的边分别平行,每个正方形的中心和另一个正方形的一个顶点重合.若正方形的边长是 a ,它们所覆盖的平面部分的周长是多少?

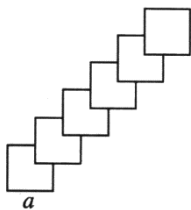


图2-30

3. 图2-31中等边三角形 ABC 的边长为6厘米,其中 D 、 E 、 F 分别是各边的中点,分别以 A 、 B 、 C 为圆心,以 AD 、 BE 、 CF 的长为半径画弧,中间阴影部分的周长是多少厘米?
4. 如图2-32所示,甲、乙、丙、丁4个全等的长方形,它们拼成了一个正方形 $EFGH$,中间空出了一个小正方形.已知这4个长方形面积的和是32平方厘米,四边形 $ABCD$ 的面积是20平方厘米,求这4个长方形的周长.
5. 如图2-33所示,等腰三角形 ABC 的腰 AC 上的中线 BD 把 $\triangle ABC$ 的周长分为12厘米和21厘米两部分,求三角形底边 BC 的长.

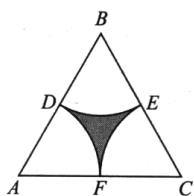


图2-31

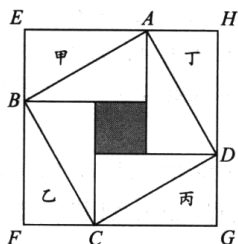


图2-32

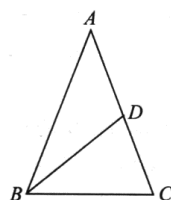
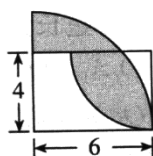


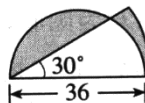
图2-33

6. 求图2-34(a)、(b)中阴影部分的周长.

7. 如图2-35所示,一条直线上放着一个长和宽分别为4厘米和3厘米的长方形I,它的对角线恰好是5厘米. 这个长方形绕顶点B顺时针旋转 90° 后,到达长方形II的位置,这样连续旋转3次,点A到达点E的位置. 求点A走过的路程的长.



(a)



(b)

图2-34

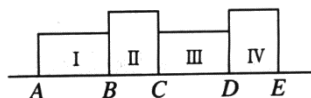


图2-35

8. 如图2-36所示,四边形ABCD是正方形,三角形CDF是等边三角形. 求 $\angle AFB$ 是多少度.

9. 如图2-37所示,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAD = 30^\circ$,且 $AE = AD$,求 $\angle x$ 是多少度.

10. 如图2-38所示,将3个大小一样的正方形的一个顶点重合放置. 求 $\angle 1$ 是多少度.

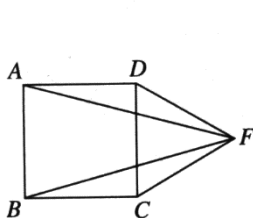


图2-36

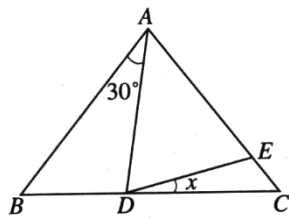


图2-37

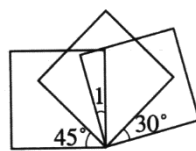


图2-38

11. 图2-39是由9个等边三角形拼成的六边形,已知中间最小的等边三角形的边长是1,这个六边形的周长是多少?

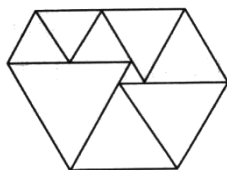


图2-39

12. 图 2-40(a)、图 2-40(b)是两个形状、大小完全相同的长方形,在每个长方形内放入 4 个如图 2-40(c)所示的小长方形,阴影区域是空下来的部分,图(a)、图(b)中阴影区域的周长哪个大?

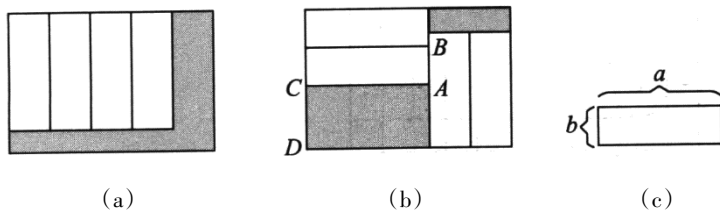


图 2-40

13. 如图 2-41 所示,正三角形的边长等于圆的周长,固定正三角形,让圆在三角形外,沿正三角形的边滚动,当圆滚回原处时,它自转了几圈?

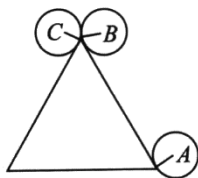


图 2-41

14. 两个齿轮咬合在一起,大轮 24 齿,小轮 8 齿. 大轮不动,小轮绕大轮转一周,则小轮自转了几圈?

2.3 平面图形的面积

2.3.1 主要理论

平面图形的周长与面积是小学阶段“图形与几何”部分的主要学习内容之一,本单元的解题思路主要应用数形结合、分类、类比、集合、对应、对称、转化、化归等基本思想,在计算中常用倍数关系、等量代换、比例基本性质、按比例分配、分数基本性质等代数方法,利用平移、割补、旋转、运动等手段对图形进行处理,并应用相关的周长、面积公式求解. 对于正方形、长方形、三角形、圆等基本图形的面积,可以直接利用公式计算;对于一些不规则图形的面积,可根据图形的特点进行分析,通过割补、平移、旋转、等积变换等方法转化成基本图形来计算.

2.3.2 实例分享

1. 拼组法

对于一些由长方形、正方形、三角形等基本图形组成的,比较复杂的图形面积计算问题,当不便于直接求阴影部分的面积时,可仔细观察图形的特点,移动阴影部分中几个相同的图形,将其拼组成若干个基本图形,则这几个基本图形的面积即为阴影部分的面积.

例2-14 已知一个边长8厘米的正方形里有一个长方形,如图2-23所示,长方形的4个顶点恰好把正方形4条边都分成两段,其中长的一段是短的3倍. 求图中阴影部分的面积.

分析与解答

如图2-24所示,所求阴影部分由4个等腰直角三角形组成,正好可以拼成大、小两个正方形. 由题意知,拼成的两个正方形的边长之和就是原正方形的边长8厘米,拼成的大正方形的边长是小正方形边长的3倍.

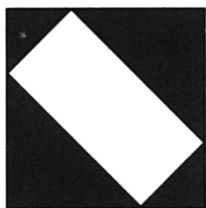


图2-42

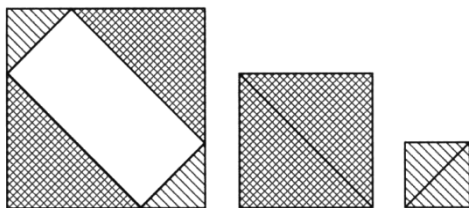


图2-43

由和倍问题的数量关系式可以求出,拼得的小正方形的边长为 $8 \div (3 + 1) = 2$ (厘米),大正方形的边长为 $2 \times 3 = 6$ (厘米).

答:所求的阴影部分面积为 $2 \times 2 + 6 \times 6 = 40$ (平方厘米).

2. 平移法

为了便于计算面积,有时需要平行移动某些图形的位置,在移动过程中,其大小、形状不会发生改变,面积也就不会改变.

例2-15 一个长方形广场长16米,宽8米,在四角各有一块草地,中间有两条2米宽的小路,如图2-44所示. 求每一块草地的面积.

方法一:公式法.

因为每一块长方形草地的长为 $(16 - 2) \div 2 = 7$ (米),宽为 $(8 - 2) \div 2 = 3$ (米),所以,每一块草地的面积为 $7 \times 3 = 21$ (平方米).

方法二:采用平移法.

如图2-45所示,把两条小路平移到广场的下侧和左侧,路的面积和草地的面积都不会发生改变. 用广场的长减去2米,得到4块草地的总长为 $16 - 2 = 14$ (米),用广场的宽减去2米,得到4块草地的总宽为 $8 - 2 = 6$ (米). 所以,每一块草地的面积为 $14 \times 6 \div 4 = 21$ (平方米).

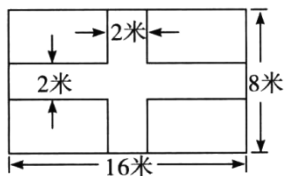


图2-44

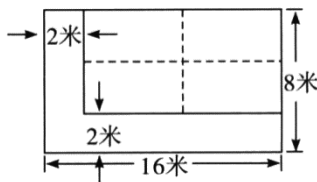


图2-45

3. 割补法

将原图形分割成若干个简单图形(但不移动其位置),分别算出每个简单图形的面积,把这些面积加起来,便可得到原图形的面积,这种求面积的方法称为分割法.

将原图形添加、补充成一个新的简单图形,用新图形的面积减去填补部分的面积,便可得到原图形的面积,这种求面积的方法称为添补法.

把原图形的某一部分切割下来,填补在该图形的另一部分,使之成为一个新的简单图形,则新图形的面积即为原图形的面积,这种求面积的方法称为割补法.

例2-16 图2-46中有两个正方形,其中 EB 、 GD 均为4厘米,正方形 $ABCD$ 的面积比正方形 $AEFG$ 的面积多96平方厘米. 求这两个正方形的面积.

分析与解答

采用分割法. 如图2-47所示,过小正方形的顶点 F 作两条垂直于 BC 、 CD 的直线,分别交 BC 、 CD 于点 H 和点 I ,于是正方形 $ABCD$ 比正方形 $AEFG$ 多出的部分就分成了一个正方形和两个长方形,正方形 $CHFI$ 的面积为 $4 \times 4 = 16$ (平方厘米),则长方形 $BEFH$ 和 $DIFG$ 的面积为 $(96 - 16) \div 2 = 40$ (平方厘米). 因为长方形 $BEFH$ 的长为 $40 \div 4 = 10$ (厘米),所以正方形 $AEFG$ 的边长为10厘米,面积为 $10 \times 10 = 100$ (平方厘米). 正方形 $ABCD$ 的面积为 $(10 + 4) \times (10 + 4) = 196$ (平方厘米).

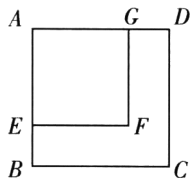


图2-46

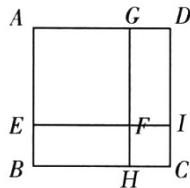


图2-47

例2-17 如图2-48所示,已知正六边形 $ABCDEF$ 的面积是8平方厘米, M 、 N 、 P 分别是 AB 、 CD 、 EF 的中点,求 $\triangle MNP$ 的面积.

分析与解答

方法一:分割法.

如图2-49所示,把正六边形分割成24个全等的小等边三角形, $\triangle MNP$ 由9个这样的三角形组成,所以 $S_{\triangle MNP} = 8 \div 24 \times 9 = 3$ (平方厘米).

方法二:添补法.

如图2-50所示,延长正六边形的三边 AB 、 CD 、 EF 分别交于 M' 、 N' 、 P' 三点. 因为正六边形的每个角都是 120° ,所以 $\triangle N'CB$ 、 $\triangle P'ED$ 、 $\triangle M'AF$ 都是等边三角形. 又这3个等边三角形的边长

等于正六边形的边长,故

$$S_{\triangle NCB} = S_{\triangle PED} = S_{\triangle MAF} = \frac{1}{6} S_{\text{六边形} ABCDEF} = \frac{1}{6} \times 8 = \frac{4}{3} (\text{平方厘米})$$

$$S_{\triangle MNP} = S_{\text{六边形} ABCDEF} + 3S_{\triangle MAF} = 8 + 3 \times \frac{4}{3} = 12 (\text{平方厘米})$$

$$\text{因此, } S_{\triangle MNP} = \frac{1}{4} S_{\triangle MNP} = \frac{1}{4} \times 12 = 3 (\text{平方厘米}).$$

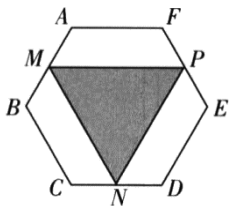


图 2-48

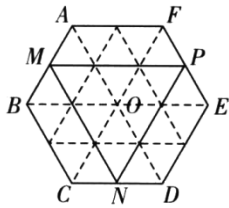


图 2-49

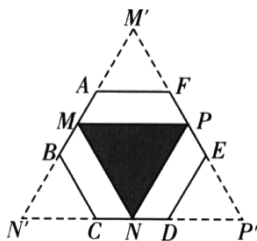


图 2-50

例 2-18 在一个等腰三角形中,两条与底边平行的线段将三角形的两条边等分成三段,如图 2-51 所示,求图中阴影部分的面积占整个图形面积的几分之几.

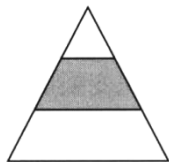


图 2-51

分析与解答

方法一:分割法.

如图 2-52(a)所示,将等腰三角形分割成 9 个全等的小三角形,则阴影部分包含 3 个小三角形,所以阴影部分的面积占整个图形面积的 $\frac{1}{9} \times 3 = \frac{1}{3}$.

方法二:添补法.

如图 2-52(b)所示,将两个这样的三角形拼成一个平行四边形.显然,图中阴影部分的面积是平行四边形面积的 $\frac{1}{3}$. 又因为平行四边形的面积是等腰三角形面积的 2 倍,现阴影部分的面积是原阴影部分面积的 2 倍,所以原阴影部分的面积占整个图形面积的 $\frac{1}{3}$.

方法三:割补法.

如图 2-52(c)所示,先从顶点作底边上的高,则等腰三角形被分割成两个相同的直角三角形,再把这两个直角三角形拼在一起形成一个长方形.显然,长方形的面积与等腰三角形的面积是相等的,而阴影部分的面积正好是长方形面积的 $\frac{1}{3}$,所以原阴影部分的面积占整个图形面积的 $\frac{1}{3}$.

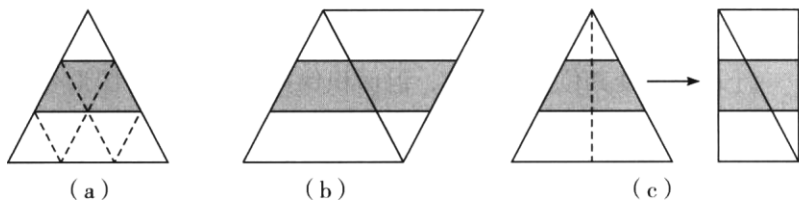


图2-52

注意,前两种方法对任意三角形都适用.也就是说,将例题中的等腰三角形换成任意三角形,其他条件不变,结论仍然成立.

4. 对称法

对于一些存在对称性的图形,其面积可利用互为对称的图形面积相等原则求得.这种采用对称性求图形面积的方法称为对称法.

例2-19 已知有5个正方形,其中里面的小正方形都由外面较大的正方形的四边中点连接而成,如图2-53所示.已知最外面的大正方形边长为16厘米,求里面第5个正方形的面积.

分析与解答

如图2-54所示,连接任意正方形四边中点所得的新正方形的面积与剩余的4个三角形的面积之和相等,即新正方形的面积正好是原正方形面积的一半.因为最外面的大正方形面积为 $16 \times 16 = 256$ (平方厘米),所以第2个正方形的面积为 $256 \div 2 = 128$ (平方厘米),第3个正方形的面积为 $128 \div 2 = 64$ (平方厘米),以此类推,则第5个正方形的面积为 $64 \div 2 \div 2 = 16$ (平方厘米).

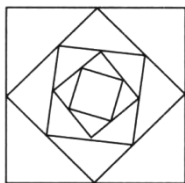


图2-53

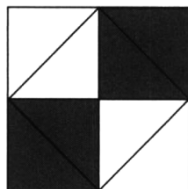


图2-54

5. 等积变换法

一个图形改变其位置或形状,但面积保持不变,这种图形变换称为等积变换.特别地,使三角形面积相等的变换方法称为三角形等积变换法.三角形等积变换的性质如下:

- (1) 夹在两条平行线之间的同底的两个三角形面积相等.
- (2) 两个等底同高的三角形的面积相等.
- (3) 两个三角形底(高)相等时,它们的面积比等于高(底)的比.

例2-20 如图2-55所示, $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是两个完全相同的直角三角形,已知 $AB = 10$ 厘米, $BE = 9$ 厘米, $OD = 4$ 厘米,求梯形 $DOCF$ 的面积.

分析与解答

直接用公式计算梯形 $DOCF$ 的面积显然条件不满足,图中没有给出梯形上底 OC 、下底 DF 及其高的信息.因此,本类题目需要利用等积变换的方法来解决.因为这两个三角形的形状完全相同,所以可以推导出梯形 $DOCF$ 与梯形 $ABEO$ 的面积是相等的,如图2-56所示.因此,可通过

计算梯形 $ABEO$ 的面积来推算出梯形 $DOCF$ 的面积.

$$\frac{1}{2} \times (10 - 4 + 10) \times 9 = 72 (\text{平方厘米})$$

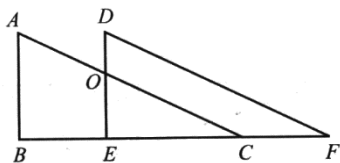


图2-55

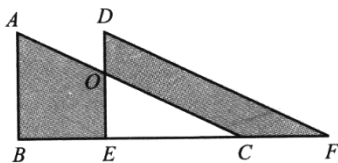


图2-56

例2-21 如图2-57所示, 已知小正方形的边长是2厘米, 求 $\triangle AED$ 的面积.

分析与解答

连接 AC , 如图2-58所示. 由于 $\triangle ACE$ 与 $\triangle ACD$ 的底都等于小正方形的边长, 高都等于大正方形的边长, 所以 $S_{\triangle ACE} = S_{\triangle ACD}$. 因为 $\triangle ACF$ 是 $\triangle ACE$ 与 $\triangle ACD$ 的公共部分, 所以去掉这个公共部分, 根据差不变性质, 剩下的两个部分面积相等, 即 $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle CDF}$. 根据等积变换, 求 $\triangle AED$ 的面积等于求 $\triangle CDE$ 的面积.

因此, $S_{\triangle AED} = S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2 (\text{平方厘米})$.

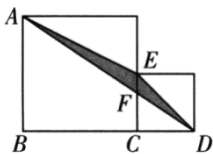


图2-57

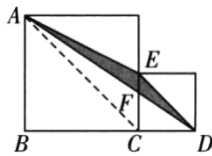


图2-58

例2-22 如图2-59, 求阴影部分的面积. (图中单位为厘米)

分析与解答

方法一:

因为

$$S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} AC \times CE$$

$$S_{\text{梯形} BCEF} = \frac{1}{2} (CE + BF) \times BC = \frac{1}{2} (BC + AB) \times CE = \frac{1}{2} AC \times CE$$

所以 $S_{\triangle ACE} = S_{\text{梯形} BCEF}$, 去掉重叠部分即四边形 $BCED$ 后, 可得 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle DEF}$, 如图2-60所示.

因此, 阴影部分的面积等于扇形 ABF 的面积, 为 $\frac{1}{4} \pi \times 4^2 = 4\pi (\text{平方厘米})$.

方法二:

连接 AF 、 BE , 则 AF 平行于 BE , 如图2-61所示. 由三角形等积变换的性质可知, $S_{\triangle ABF} = S_{\triangle AEF}$.

因此, 阴影部分的面积等于扇形 ABF 的面积, 为 $\frac{1}{4} \pi \times 4^2 = 4\pi (\text{平方厘米})$.

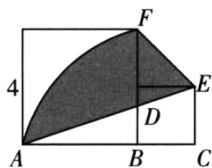


图 2-59

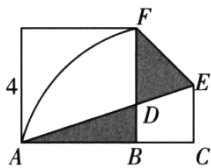


图 2-60

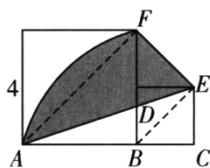


图 2-61

6. 等量代换法

有些面积计算问题,可借助图形或题设条件寻找明显或隐含的等量关系,利用等量代换的方法来求解,

例 2-23 大小相同的长方形砖块砌成了如图 2-62 所示的墙面. 已知砖块的长是 9 厘米,求阴影部分的面积.

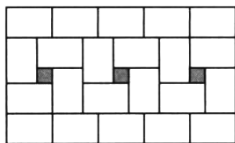


图 2-62

分析与解答

从图 2-62 中可以看出,阴影部分的面积等于墙面的面积减去 22 块砖块的面积之和. 若利用这个等量关系去计算,显然是复杂的. 进一步观察图形,可知阴影部分是大小一样的 3 个正方形,因此可以直接求这些正方形的面积. 又因为这三个正方形的边长等于砖块的长减去宽,故需要先求出砖块的宽. 由图形可知,5 块砖块的长等于 3 块砖块的宽与长之和,即两块砖块的长等于三块砖块的宽. 由此可以求出砖块的宽.

分析与解答

砖块的宽为 $9 \times 2 \div 3 = 6$ (厘米),则正方形的边长为 $9 - 6 = 3$ (厘米). 因此,阴影部分的面积为 $3 \times 3^2 = 27$ (平方厘米).

7. 代数法

有时,即使利用平移、割补、等积变换等方法,也不容易求阴影部分的面积,这时可设未知量,根据题意,找出某种等量关系,列出方程来求面积.

例 2-24 把面积之和是 46 平方厘米的两个长方形部分重叠放置,如图 2-63 所示. 阴影部分 A 的面积比阴影部分 B 的面积大 20 平方厘米. 求这两个长方形的面积.

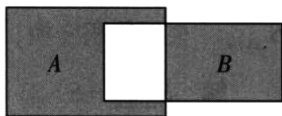


图 2-63

分析与解答

由题意知,可设阴影部分 B 的面积为 x 平方厘米,重叠部分的面积为 y 平方厘米,则阴影部分 A 的面积等于 $(x+20)$ 平方厘米.由两个长方形的面积之和为46平方厘米,可得

$$x + y + (x + 20) + y = 46$$

$$\text{解得 } x + y = 13.$$

$x + y$ 刚好是其中一个长方形的面积,故这个长方形的面积是13平方厘米,另一个长方形的面积是 $46 - 13 = 33$ (平方厘米).

此例也说明在利用代数法时,所设的未知数有时可以不用求出,只需用来构造方程就可以解决问题.

8. 旋转法

旋转法就是将整个(或部分)图形绕某个点顺时针(或逆时针)旋转某个角度,旋转后所求的阴影部分的面积不变.

例2-25 如图2-64所示,等腰直角三角形 ABC 的斜边 AC 长8厘米, O 是 AC 的中点,且 $BD = AE$,求四边形 $ODBE$ 的面积.

分析与解答

连接 OB ,如图2-65所示,因为 $BD = AE$,所以 $\triangle OAE$ 与 $\triangle OBD$ 全等.把 $\triangle OBD$ 绕 O 逆时针旋转 90° ($\angle DOE = 90^\circ$),则 $\triangle OAE$ 与 $\triangle OBD$ 重合,因此,所求四边形 $ODBE$ 的面积等于 $\triangle OAB$ 的面积,即 $4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$ (平方厘米).

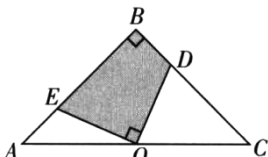


图2-64

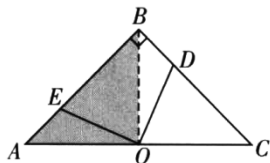


图2-65

9. 比例关系法

为了解决面积的计算问题,有时需用到一些未知量.虽然这些量未知,但它们的比例关系是一个定量.因此,可以利用比例关系求面积.通常会用到如下性质:如果两个三角形相似,那么它们的对应边成比例.

例2-26 如图2-66所示,长方形 $ABCD$ 的长为5厘米,宽为2厘米,长方形 $AEFG$ 的长为8厘米,宽为1厘米.求 $\triangle BCH$ 与 $\triangle GHF$ 的面积之差.

分析与解答

因为 $\angle CBH = \angle FGH$, $\angle BHC = \angle FHG$, 所以 $\triangle BCH \sim \triangle GFH$, 因此, $\frac{BC}{GF} = \frac{BH}{GH} = \frac{2}{1}$,

$$\text{于是 } BH = \frac{2}{3}BG = \frac{2}{3} \times (8 - 5) = 2(\text{厘米})$$

$$GH = \frac{1}{3}BG = \frac{1}{3} \times (8 - 5) = 1(\text{厘米})$$

因为 $S_{\triangle BCH} = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$ (平方厘米), $S_{\triangle GFH} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (平方厘米), 所以 $S_{\triangle BCH} - S_{\triangle GFH} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (平方厘米).

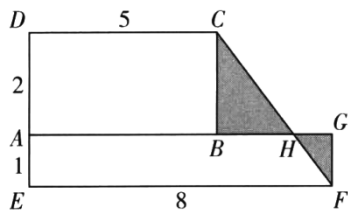


图 2-66

实战演练

1. 如图 2-67 所示, 一个直角三角形的两条直角边分别为 8 厘米和 20 厘米, 在这个直角三角形中画一个最大的正方形, 求正方形的面积.

2. 如图 2-68 所示, $\triangle ABC$ 的面积是 16 平方厘米, $AD = \frac{1}{2}AB$, $AE = \frac{1}{4}AC$, $BF = \frac{3}{4}BC$, 求 $\triangle DEF$ 的面积.

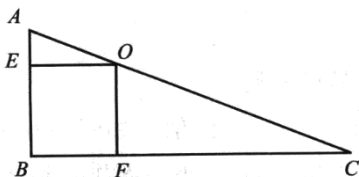


图 2-67

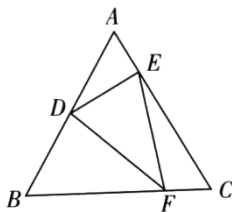


图 2-68

3. 如图 2-69, 梯形 $ABCD$ 中, AB 平行于 CD , 又 $BD = 4$ 厘米, $AC = 3$ 厘米, $AB + CD = 5$ 厘米, 求梯形 $ABCD$ 的面积.

4. 如图 2-70 所示, 已知四边形 $ABCD$ 的两条边 $AB = 8$ 厘米, $DC = 2$ 厘米, 且 $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.

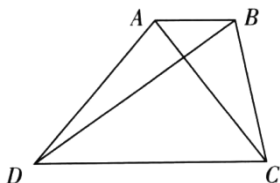


图 2-69

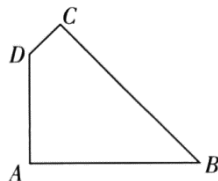


图 2-70

5. 如图 2-71 所示, 在直角三角形中有一个正方形, 已知 $BD = 8$ 厘米, $DC = 6$ 厘米, 求阴影部

分的面积.

6. 如图2-72所示,有两个正方形,大正方形的边长为8厘米,求阴影部分的面积.

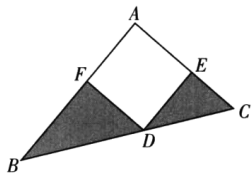


图2-71

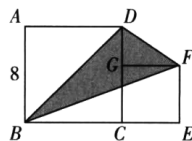


图2-72

7. 图2-73由4个正六边形组成,每个正六边形的面积都是6,以这4个正六边形的顶点为顶点,可以连接面积为4的等边三角形有多少个?

8. 如图2-74所示,已知 $\triangle ABE$ 的面积为1,且 $BC = 2AB$, $BE = ED$,求 $\triangle BCD$ 的面积.



图2-73

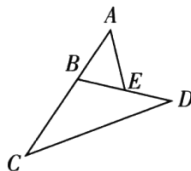


图2-74

9. 如图2-75所示,在 $\triangle ABC$ 中, M 是边 AB 的中点, N 是边 AC 上的三等分点, CM 与 BN 相交于点 K .若 $\triangle BCK$ 的面积等于1,则 $\triangle ABC$ 的面积等于多少?

10. 如图2-76所示,红、黄、绿三张大小一样的正方形纸片放在一个正方形的盒子内,它们之间相互叠合. 已知露在外面的部分中,红的面积是20,黄的面积是14,绿的面积是10. 求正方形盒子的底面面积.

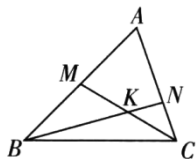


图2-75

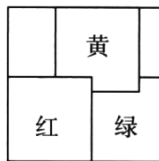


图2-76

11. 如图2-77所示,六边形 $ABCDEF$ 中, $AB = ED$, $AF = CD$, $BC = EF$,且 AB 平行于 ED , AF 平行于 CD , BC 平行于 EF ,对角线 FD 垂直于 BD ,已知 FD 长12厘米, BD 长6厘米,求这个六边形 $ABCDEF$ 的面积.

12. 如图2-78,求图中两块阴影部分面积的差.(图中单位为厘米)

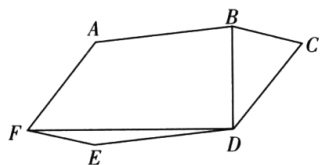


图2-77

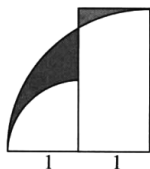


图2-78

13. 如图2-79所示,长方形 $ABCD$ 中, AB 长6厘米, AD 长8厘米,四边形 $EFGH$ 的面积是6平方厘米,求图中阴影部分的面积.

14. 如图2-80所示,正方形的边长为6厘米,求图中阴影部分的面积.

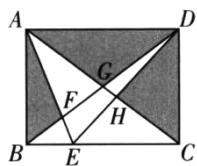


图2-79

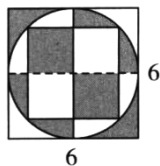


图2-80

15. 求图2-81(a)~(i)中阴影部分的面积.

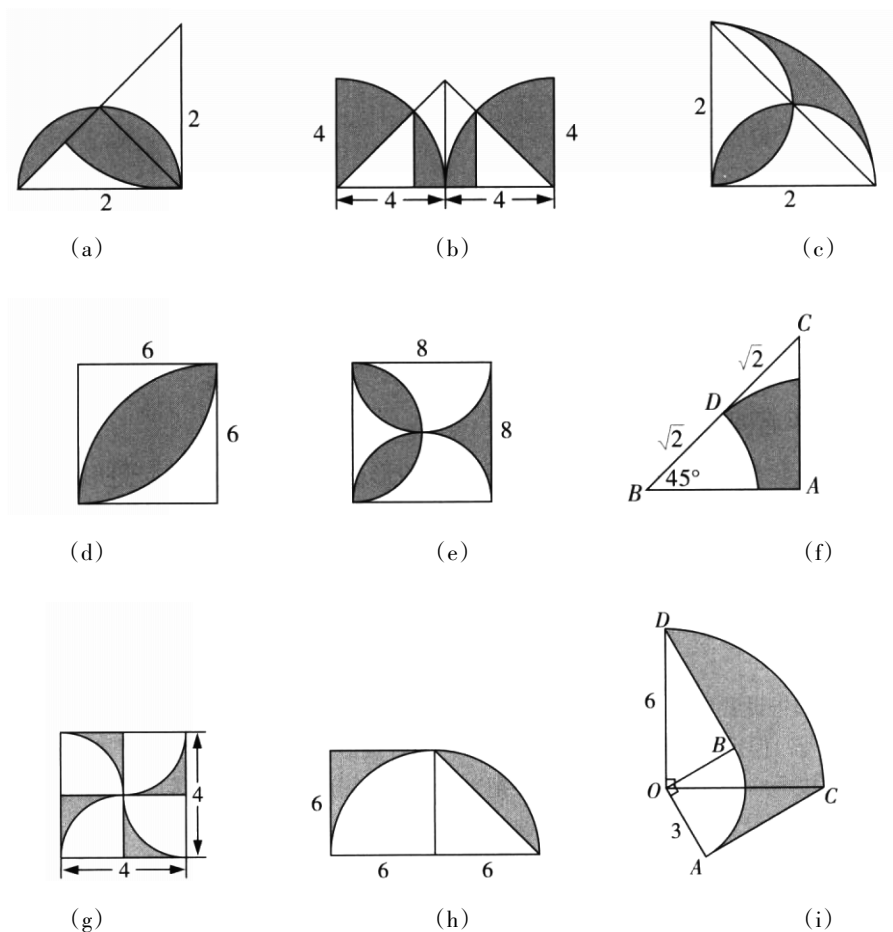


图2-81

16. 如图2-82所示, E 、 M 分别是直角梯形 $ABCD$ 两边上的点, DQ 、 ME 、 CP 彼此平行, $AD=7$, $BC=9$, $AE=7$, $BE=5$,求图中阴影部分的面积.

17. 如图2-83所示, $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB=90^\circ$,已知 $AC=8$, $CD=8$, $CB=12$, $AM=BM$,求 $\triangle AMN$ 的面积.

18. 如图2-84所示,已知梯形 $ABCD$ 的面积是64平方厘米, AD 长3厘米, BC 长9厘米, AC 、

BD 相交于点 O 、求 $\triangle AOB$ 的面积.

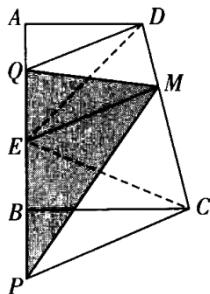


图 2-82

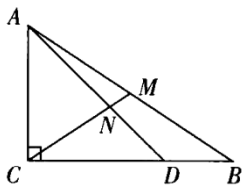


图 2-83

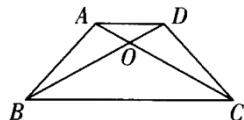


图 2-84

2.4 立体图形的表面积与体积

2.4.1 主要理论

求立体图形的表面积是在求平面图形面积的基础上进行的,在计算立体图形的表面积的时候,要利用平移、割补、旋转、重叠、运动等手段对图形进行处理,把问题平面化,利用平面图形的面积公式进行计算. 还要善于运用转化的思想,注意用好转化的方法,将图形进行有效的转化,通过分割、移动、合并、换型等方式化难为易,借助分析、综合、推理等步骤来解决问题. 在计算几何体的体积时,可利用类比和数形结合等方法进行计算.

设正方体的边长为 a ,长方体的长、宽、高分别为 a 、 b 、 c 、圆柱体和圆锥体的半径和高分别为 r 、 h 、则几何体的表面积和体积计算公式见表 2-2.

表 2-2 几何体的表面积和体积计算公式

几何体	表面积	体积
正方体	$S = 6a^2$	$V = a^3$
长方体	$S = 2(ab + bc + ac)$	$V = abc$
圆柱体	$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$	$V = \pi r^2 h$
圆锥体(母线为 l)	$S = \pi r^2 + \frac{n}{360}\pi l^2$ 或 $S = \pi r^2 + \pi rl$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
球体(半径为 r)	$S = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

2.4.2 实例分享

例 2-27 如图 2-85 所示,在一个棱长是 8 厘米的正方体木块的 6 个面正中各挖去一个棱

长是2厘米的正方体孔洞,挖洞后木块的表面积和体积各是多少?

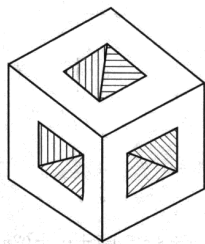


图2-85

分析与解答

挖洞后木块每个面增加了4个边长为2厘米的小正方形的面积,由此可求出大木块的总表面积. 由于挖去的小正方体未能把大木块贯穿,所以大木块减少了6个棱长为2厘米的小正方体的体积.

挖洞后木块的表面积: $(8 \times 8 + 2 \times 2 \times 4) \times 6 = 480$ (平方厘米);

挖洞后木块的体积: $8 \times 8 \times 8 - 2 \times 2 \times 2 \times 6 = 464$ (立方厘米).

答:挖洞后木块的表面积是480平方厘米,体积是464立方厘米.

例2-28 一个底面半径8厘米、高20厘米的圆柱体铁块,现在要把它铸造成一个底面与圆柱体相同的圆锥体. 这个圆锥体的高是多少厘米?

分析与解答

根据圆柱体体积公式可先求出圆柱体铁块的体积,由于做成的圆锥体体积不变,所以可根据圆锥体体积公式求出圆锥体的高.

圆柱体铁块的体积为 $3.14 \times 64 \times 20 = 4019.2$ (立方厘米).

设圆锥的高为 h 厘米,则 $3.14 \times 64 \times h \div 3 = 4019.2$,解得 $h = 60$ (厘米).

答:圆锥体的高是60厘米.

例2-29 有两个完全相同的长方体恰好拼成了一个正方体,正方体的表面积是30平方厘米. 如果把这两个长方体改拼成一个大长方体,那么大长方体的表面积是多少?

分析与解答

方法一:

因为正方体有6个相等的面,所以每个面的面积是 $30 \div 6 = 5$ 平方厘米. 拼成一个大长方体要减少一个面的面积,同时增加两个面的面积. 由此可求出大长方体的表面积.

即 $30 - 30 \div 6 + 30 \div 6 \times 2 = 30 - 5 + 10 = 35$ (平方厘米)

或 $30 + 30 \div 6 \times (2 - 1) = 30 + 5 = 35$ (平方厘米)

方法二:

因为拼成大长方体后,表面积先减少一个面的面积,同时又增加两个面的面积,实际上只增加了一个面的面积.

即 $30 + 30 \div 6 = 30 + 5 = 35$ (平方厘米)

方法三:

因为原来正方体的表面积是6个小正方形面积的和,拼成的大长方体的表面积是7个小正方

形面积的和,所以可先求每个小正方形的面积,再求7个小正方形的面积.

$$\text{即 } 30 \div 6 \times (6 + 1) = 30 \div 6 \times 7 = 35 (\text{平方厘米})$$

答:大长方体的表面积是35平方厘米.

例2-30 已知一个长方体的前表面与上表面的面积之和是209平方厘米,且这个长方体的长、宽、高都是以厘米为单位的质数. 这个长方体的表面积是多少平方厘米?

分析与解答

因为长方体的长、宽、高都是质数,且 $209 = 11 \times 19$,而11和19两个数中,只有19能写成两个质数的和,即 $19 = 2 + 17$.

所以,这个长方体的表面积 $= (11 \times 17 + 11 \times 2 + 2 \times 17) \times 2 = 243 \times 2 = 486$ (平方厘米).

答:这个长方体的表面积是486平方厘米.

实战演练

1. 一个长方体木块,长5厘米、宽4厘米、高3厘米. 在它的表面涂上红色,然后把它割成棱长为1厘米的小正方体. 在割成的小正方体中,有多少块三面涂有红色,有多少块两面涂有红色,有多少块一面涂有红色,有多少块六面都没有红色?

2. 把一块棱长为12分米的正方体木料加工成一个体积最大的圆柱体,这个圆柱体的体积是多少?

3. 一个圆锥形的石子堆,底面周长为25.12米,高为3米,每立方米石子重2吨. 如果用一辆载重4吨的汽车来运这些石子,至少需运多少次才能运完?

4. 有一个圆柱形无盖的牛奶桶,底面直径为40厘米,高为50厘米. 这个牛奶桶的容积是多少立方厘米?

5. 一个圆柱形油桶的容积为40立方分米,内底面积为10平方分米,当桶里装了油时,油面高多少分米?

6. 王大爷听说我国西南部地区遭受旱灾,于是把自家收的小麦捐给灾区. 已知装小麦的粮囤是圆柱形,底面直径为3米,高为1.2米,每立方米小麦重420千克,王大爷共捐小麦多少千克?

7. 一个长方体的沙坑装满了沙子,已知这个沙坑长3米,宽1.5米,深2米,每立方米沙子重1400千克. 这个沙坑里共装沙子多少吨?

8. 有一根长0.5米的方木料,横截面的边长为2厘米,这根方木平放时占地面积有多大? 体积是多少?

9. 一个长方体高26厘米,沿着水平方向将其横切成两个小长方体,表面积增加了80平方厘米,求原来长方体的体积.

10. 在一个长120厘米、宽60厘米的长方体水箱里,放入一块长方体的铁块后,水面比原来上升了2厘米. 已知铁块的长和宽都是20厘米,求铁块的高.

11. 把一个棱长为4分米的正方体铁块熔炼成一个高为8分米的长方体铁块,求长方体铁块的底面积.

12. 一个圆柱形油桶,底面半径0.6米,高1.5米. 做一个这样的油桶,至少需要铁皮多少平方米? 如果每升汽油重0.85千克,这个油桶可以盛汽油多少千克?(得数保留一位小数.)

13. 一个圆锥形容器甲与一个半球形容器乙,它们的圆形口直径与容器高的尺寸如图2-86所示,若用甲容器取水来注满乙容器,至少要注水多少次?

14. 将一个表面涂有红色的长方体分割成若干个体积为1立方厘米的小正方体,其中一点红色都没有的小正方体只有3块. 求原来长方体的体积.

15. 如图2-87所示,一个正方体,棱长为10厘米:

(1)在这个正方体上面挖出一个棱长为3厘米的小正方体,剩下部分的体积和表面积各是多少?(提示:有多种挖法,不同的挖法表面积不同.)

(2)在这个正方体上面挖出一个长为10厘米、宽和高都为3厘米的小长方体,剩下部分的表面积是多少?(提示:有多种挖法,不同的挖法表面积不同)

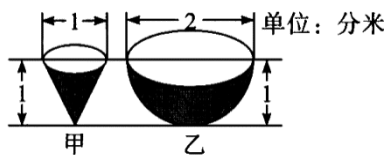


图2-86

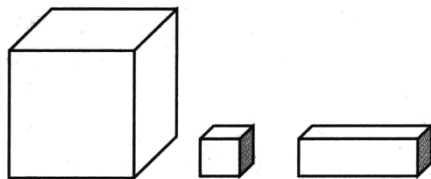


图2-87

2.5 截面、展开图和三视图

2.5.1 主要理论

立体图形的三视图、表面展开图以及某些截面图形,可以帮助我们认识立体图形的几何性质,有助于把空间图形问题转化为平面图形问题,有利于问题的解决.

2.5.2 实例分享

例2-31 图2-88中的一堆积木是由16块棱长为2厘米的小正方体堆成的,求它的表面积.



图2-88

分析与解答

从前、后、左、右、上、下6个方向分别看这堆积木的表面:

从前、后看各有7个边长是2厘米的小正方形.

从左、右看各有8个边长是2厘米的小正方形(凹进部分有2个边长为2厘米的小正方形).

从上、下看各有9个边长是2厘米的小正方形.

这堆积木的表面积是 $2 \times 2 \times (7 + 8 + 9 + 1) \times 2 = 200$ (平方厘米).

答:这堆积木的表面积是200平方厘米.

例2-32 圆柱形售报亭的高和底面直径相等,如图2-89所示,在售报亭上开一个边长等于底面半径的正方形窗口,问窗口处挖去的圆柱侧面部分的面积占圆柱侧面积的几分之几?

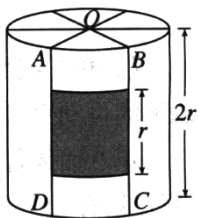


图2-89

分析与解答

如图2-89所示,因为 AB 弧的长是底面圆周长的 $\frac{1}{6}$,正方形窗口的边长等于圆柱高的 $\frac{1}{2}$,所以,挖去的圆柱侧面部分的面积是圆柱侧面积的 $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

例2-33 有一块边长为24厘米的正方形厚纸,如果在它的4个角上各剪去一个小正方形,就可以做成一个无盖的纸盒.现在要使做成的纸盒容积最大,剪去的小正方形的边长应为多少?

分析与解答

正方形纸剪去四角做成的纸盒是底面为正方形的长方体.由4个侧面和一个底面组成,如图2-90所示.

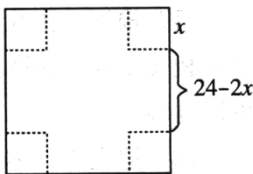


图2-90

设剪去的每个小正方形的边长为 x 厘米,那么纸盒容积是

$$V = (24 - 2x)(24 - 2x) \cdot x = \frac{1}{4}(24 - 2x)(24 - 2x) \cdot 4x$$

如果3个因数的和为定值,则当这3个因数相等时,它们的乘积最大.这里的3个因数是 $24 - 2x$, $24 - 2x$ 和 $4x$.

$$\therefore (24 - 2x) + (24 - 2x) + 4x = 48 (\text{定值})$$

$\therefore$ 当 $24 - 2x = 4x$, 即 $x = 4$ 时 V 最大

答: 剪去的小正方形的边长是4厘米时, 纸盒容积最大.

例2-34 图2-91(a)~(h)给出了若干张由相同的8个正三角形组成的纸片, 请你找出所有的能沿虚线折叠拼成正八面体的纸片, 如图2-91(i)所示.

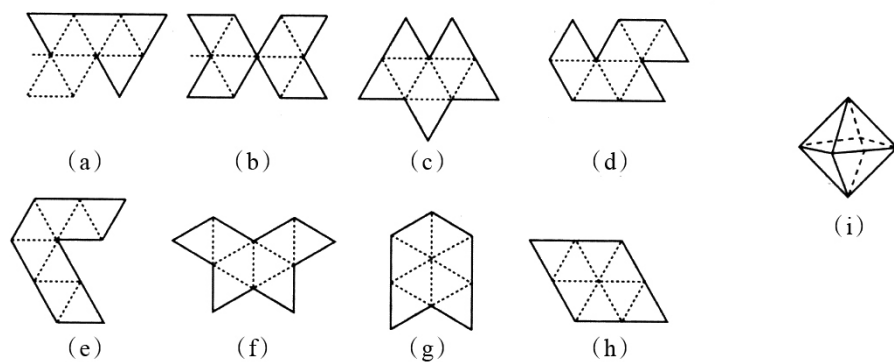


图2-91

分析与解答

正八面体每个顶点处有4个面、4条棱, (A)(C)(D)(E)(G)(H)都出现一个顶点多于4个面的情况, 所以可以排除(A)(C)(D)(E)(G)(H). 只有(B)(F)可能拼成八面体. 具体操作后知道, 这两张纸片都可拼成正八面体.

例2-35 图2-92是用125个 $1 \times 1 \times 1$ (厘米)的小正方体堆成的一个 $5 \times 5 \times 5$ (厘米)的大正方体, 现在通过棱的中点A、B、C三点作截面.

(1) 截面是什么形状?

(2) 这个截面切到了多少个小立方体?

分析与解答

(1) 根据立体几何定理: “如果两个平面有两个公共点, 那么这两个平面相交于经过这两点的一条直线” “同一平面内的两条直线如果不平行, 就一定相交” 可以逐步画出经过A、B、C三点的截面, 并且看出, 这个截面是正六边形, 如图2-93所示.

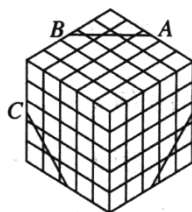


图2-92

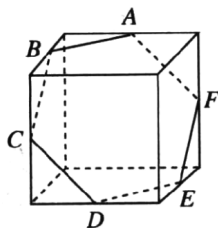


图2-93

(2) 把大正方体分成从下往上的5层, 每层有 5×5 个小正方体, 根据截面六边形和每一层相交的交线, 可以求出截面所切到的小正方体的个数, 而且第1层和第5层, 第2层和第4层中切到的小正方体的个数相同, 第3层中被切到的小正方体的个数最多.

截面切第1层和第5层的情况如图2-94所示,截面在第1层和第5层都切到了9个小正方体.

同理,截面在第2层和第4层上都切到了12个小正方体,如图2-95所示. 在第3层切到了13个小正方体,如图2-96所示.

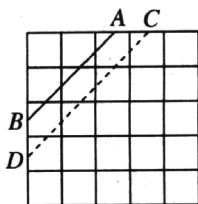


图2-94

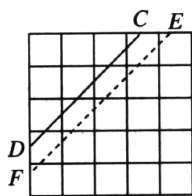


图2-95

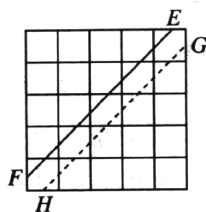


图2-96

因此,截面在大正方体上共切到了 $(9 + 12) \times 2 + 13 = 55$ (个)小正方体.

实战演练

1. 图2-97是由18个棱长为2厘米的小正方体拼成的几何体,它的表面积是多少?



图2-97

2. 图2-98中的各种图形,哪些不是正方体的表面展开图?

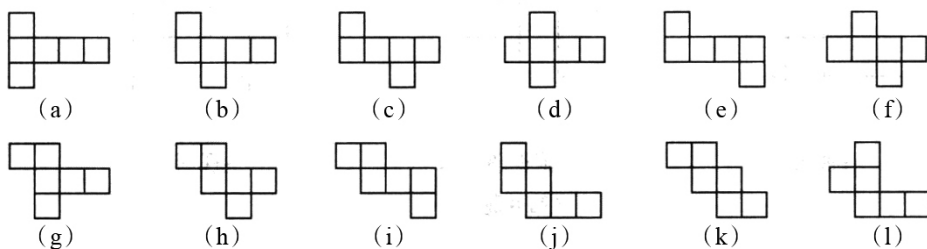


图2-98

3. 如图2-99,一个棱长为1米的正方体,沿着与正方体的面平行的3个方向分别锯成3份、4份、5份,共得到大小不同的60个长方体,这60个长方体的表面积的和是多少?

4. 将高都是1米,底面半径分别是1.5米、1米和0.5米的3个圆柱体组成如图2-100所示的物体,求这个物体的表面积.

5. 如图2-101所示,蜘蛛从正方体的顶点A沿正方体的表面到顶点B去觅食,它走的一条最短路线是ACB. 这样的最短路线有几条?

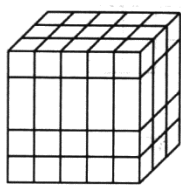


图2-99

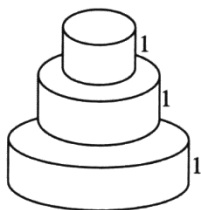


图2-100

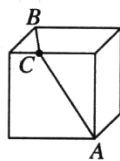


图2-101

6. 如图2-102,某工厂用长4米、宽1米的铁皮围成没有底和顶的正方形形状的产品存放处(底和顶另用别的材料),恰好够存放一周的产品. 现在产量增加了27%,问能否还用原来的铁皮围成存放处,装下现在一周的产品?

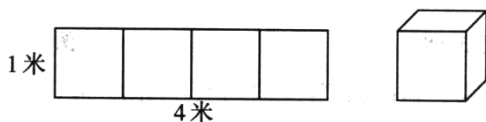
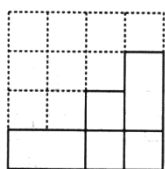


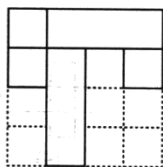
图2-102

7. 一个长、宽、高分别为15厘米、12厘米和9厘米的长方体,现从它的上面尽可能大地切下一个正方体,然后从余下的部分再尽可能大地切下一个正方体,如此共切3次,切下了3个正方体后剩下部分的体积是多少?

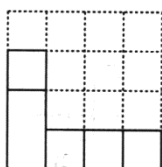
8. 有一个棱长为1厘米的正方体,一个长、宽为1厘米,高为2厘米的长方体,3个长、宽为1厘米,高为3厘米的长方体,图2-103是这5个图形组合成的几何体的三视图,画出这个组合体的直观图,并求它的表面积.



右视图



俯视图



主视图

图2-103

9. 正方体的6个面都有9个相等的正方形,用红、黄、蓝三种颜色去染这些小正方形,要求有公共边的正方形颜色不同,那么用红色染成的正方形最多有多少个?

10. 如图2-104所示,有一圆形建筑物,其通道是螺旋状的,旋转3圈半. 该通道的长度是420米,从地面到21米(最高处)都是一样的倾斜度. 甲从这条通道的P点以每分钟72米的速度往下走,乙从这条通道的Q点以每分钟36米的速度往上走,乙比甲晚出发1分钟. 在甲到达Q点之前,甲和乙每次恰好处于正上、正下位置时(在圆柱的同一条母线上),甲出发了多长时间? 请全部列举出来.

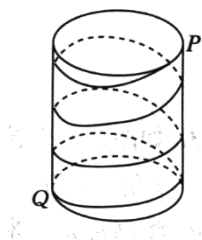


图 2-104

11. 图 2-105 中每一个正多面体的右边都有几个图形, 请你判别其中哪些是左边这个正多面体的展开图.

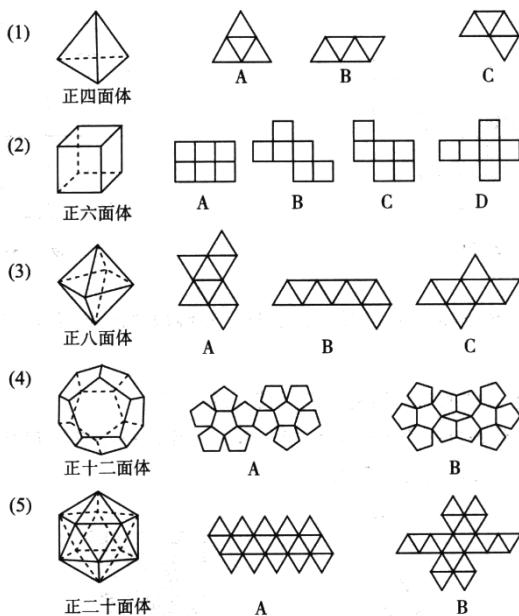


图 2-105

2.6 最短路线问题

2.6.1 主要理论

在实际生活中, 会遇到很多最短路线问题, 在求最短路线时, 经常会用到几何与图形的知识, 有时候也会用到一些其他的方法, 最常用的几种思想和方法包括:

(1) 连接两点的所有线中, 直线段是最短的;



- (2) 直线外的一个定点与直线上各点的连线以垂线最短;
- (3) 标数法;
- (4) 分析排除法,即将每种情况进行分析比较,然后得出答案.

2.6.2 实例分享

例2-36 甲、乙两村之间隔一条河,如图2-106所示.现在要在小河上架一座桥,使得这两村之间的行程最短,桥应修在何处?

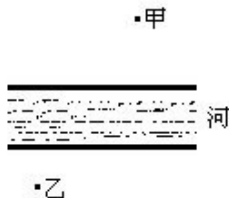


图2-106

分析与解答

设甲、乙两村分别用点 A 、 B 表示.要在河上架桥,关键是要选取一个最佳建桥的位置,使得从甲村出发经过桥到乙村的路程最短,即从甲村到甲村河边的桥头距离加上桥长(相当于河的宽度),再加上乙村到乙村河边桥头的距离最短,这是一个求最短折线的问题.直接找出这条折线很困难,能否把它转化为直线问题呢?由于河的宽度不变,不论桥修在哪里,桥都是必经之路,且桥长等于河宽,是一个定值,所以可以预先把这段距离扣除,只要使两村到河边桥头的距离最短就可以了.

所谓预先将桥长扣除,就是假设先走完桥长,即把桥平移到甲村,先过了桥,到达 C 点,找出 C 到 B 的最短路线,实际上求最短折线问题转化为直线问题.

如图2-107所示,过 A 点作河岸的垂线,在垂线上截取 AC 的长等于河宽.连 BC 与乙村的河岸交于 F 点,作 EF 垂直于河的另一岸于 E 点,则 EF 为架桥的位置,也就是 $AE + EF + FB$ 是两村之间的最短路线.

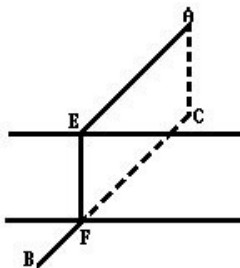


图2-107

答:桥应修在图2-107所示的 EF 处.

例2-37 相传,古希腊学者海伦精通数学、物理,聪慧过人.有一天,一位远道而来的将军向海伦请教了一个问题:从 A 地到河边饮马,然后再去 B 地,如图2-108所示,怎样走路线最短?

海伦听了将军的问题,笑了笑,提笔画了一张图,如图2-109所示给将军看,将军看了片刻,恍然大悟. 这个问题后来被人们称为“将军饮马问题”.

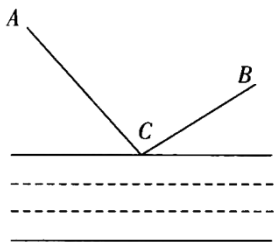


图2-108

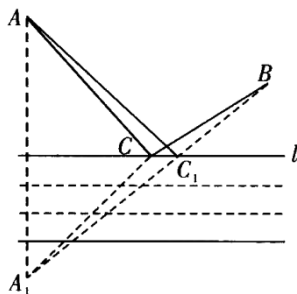


图2-109

分析与解答

从一点到另一点当然是走直线最短,但是,将军的饮马路线是一条折线,即从A到C再到B. 将军提出的问题,就是让这条折线最短.

根据对称原理,先作点A关于河岸直线l的对称点 A_1 ,连接 BA_1 交直线l于点 C_1 ,再连接 AC_1 ,则折线 AC_1B 就是将军饮马的最短路线,如图2-109所示.

证明如下:设C为河岸上除点 C_1 外的任一点,连接AC、 A_1C 、BC. 在 $\triangle A_1BC$ 中, $A_1C + BC > A_1B$,即 $A_1C + BC > A_1C_1 + BC_1$,因为 $AC = A_1C$ 、 $AC_1 = A_1C_1$,故 $AC + BC > AC_1 + BC_1$. 因此, $AC_1 + BC_1$ 最短.

答:如图2-109所示的折线 AC_1B 为最短路线.

例2-38 如图2-110所示,河流EF与公路FD所夹的角是一个锐角,某公司A在锐角EFD内. 现在要在河边建一个码头,在公路边修建一个仓库. 工人们从公司出发,先到河边的码头卸货,再把货物转运到公路边的仓库里去,然后返回A处. 问仓库、码头各应建在何处,使工人们所行的路程最短?

分析与解答

工人们从A处出发先到河边码头,再到公路边的仓库,然后回到A处,恰好走一个三角形,现在要求三角形的另外两个顶点分别建在河岸与公路的什么位置能使这个三角形的三边之和最小,可以利用轴对称原理作图.

过A分别作河岸、公路的对称点 A' 、 A'' ,如图2-111所示,连接 A' 、 A'' ,分别交河岸于M,交公路于N,则 $\triangle AMN$ 各边之和等于直线 $A'A''$ 的长度. 所以,仓库建在N处,码头建在M处,工人们所行的路程最短.

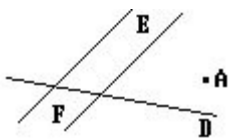


图2-110

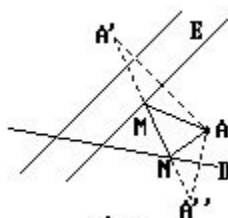


图2-111



答:仓库应建在 N 处,码头应建在 M 处.

例2-39 如图2-112是一个长、宽、高分别为4分米、1分米、2分米的长方体纸盒.一只蚂蚁要从 A 点出发在纸盒表面上爬到 B 点运送食物,求蚂蚁行走的最短路程.

分析与解答

因为蚂蚁是在长方体的表面爬行,所以本题求的是立体图形上的最短路线问题,这类问题往往可以转化为平面上的最短路线问题.将蚂蚁爬行经过的两个面展开在同一平面上,如图2-113所示,在展开图中, AB 间的最短路线是连接这两点的直线段,但要注意,蚂蚁可沿几条不同的路线到达 B 点,需对它们进行比较.

蚂蚁从 A 点出发爬到 B 点,有三条路线可以选择:

(1)从 A 点出发,经过上底面然后进入前侧面到达 B 点,将这2个面展开在同一平面上,这时 A 、 B 间的最短路线就是连线 AB ,如图2-113(a), AB 是直角三角形 ABC 的斜边,根据勾股定理可得 $AB^2 = AC^2 + BC^2 = (1+2)^2 + 4^2 = 25$.

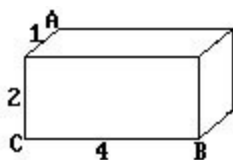


图2-112

(2)从 A 点出发,经过左侧面,然后进入前侧面到达 B 点,将这2个面展开在同一平面上,如图2-113(b),同理可得 $AB^2 = 2^2 + (1+4)^2 = 29$.

(3)从 A 点出发,经过上底面,然后进入右侧面到达 B 点,将这2个面展开在同一平面上,如图2-113(c),同理可得 $AB^2 = (2+4)^2 + 1^2 = 37$

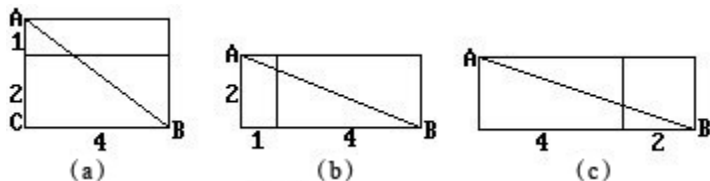


图2-113

比较这三条路线,25最小,所以蚂蚁按图2-113(a)所示的爬行路线最短,最短路程为5分米.

答:蚂蚁行走的最短路为5分米.

例2-40 图2-114是某地区的街道示意图,从图书馆到汽车站,要求走最短的路线,共有多少种不同的走法?

分析与解答

标数法是解决最短路线问题的一种常用方法,它指的是从起点到终点,任意一个点的最短路线条数等于相邻两点的最短路线条数之和.

本题中,从图书馆到 A 点只有一条路,从图书馆到 B 点也只有一条路,所以各标1.从图书馆到 C 点的最短路线条数为从图书馆到相邻的 A 、 B 两点的最短路线条数之和,所以从图书馆到 C 点的最短路线条数为2,按照此规律,可以用标数法标出从图书馆到汽车站的最短路线条数,如

图2-115所示,然后求出线路的总条数即可.

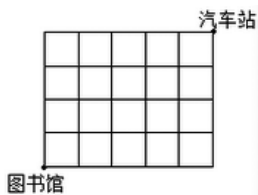


图2-114

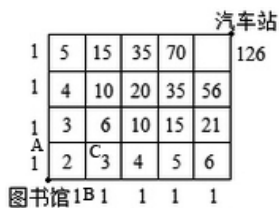


图2-115

答:从图书馆到汽车站,要求走最短的路线,共有126种不同的走法.

例2-41 图2-116是一张道路示意图,每段路上的数字表示小明走这段路所需要的时间(单位:分). 小明从A走到B最快要几分钟?

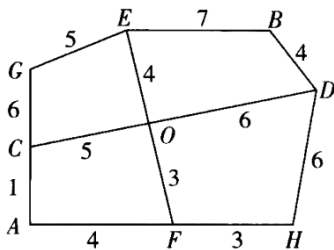


图2-116

分析与解答

我们采用分析排除法,将道路图逐步简化,从而找出最佳路线. 先观察从A到O有两条路, $A-C-O$ 用6分钟, $A-F-O$ 用7分钟,排除后者,可将 FO 抹去,但因为从A到B还有其他路线经过 AF ,故 AF 不抹去. 接着观察从A到E还剩两条路, $A-C-G-E$ 用12分钟, $A-C-O-E$ 用10分钟,排除前者,可将 AC 、 CG 、 GE 抹去. 再观察从A到D还剩两条路, $A-C-O-D$ 用12分钟, $A-F-H-D$ 用13分钟,排除后者,可将 AF 、 FH 、 HD 抹去. 最后,从A到B还剩两条路, $A-C-O-E-B$ 用17分钟, $A-C-O-D-B$ 用16分钟,排除前者,从而将道路图简化为走 $A-C-O-D-B$,共用16分钟,即 $1+5+6+4=16$ (分).

答:小明从A走到B最快要16分钟.

实战演练

1. 如图2-117所示,A、B两所学校在公路的同侧,想在这两校附近的公路上建一个汽车站,要求车站到两所学校的距离之和最小,应该把车站建在哪里?

2. 小明很喜欢上活动课,因为在活动课上他们经常做不同的游戏,今天他们又做了一个新游戏. 如图, AB 、 CD 分别是两条拉好的绳子,同学们需要从O处出发,分别触摸两条绳子后再回到O处,看谁最快. 同学们,快设计一条最短的路线吧

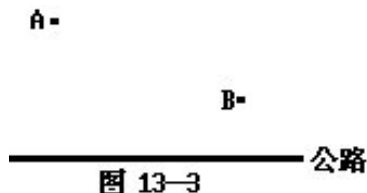


图 2-117

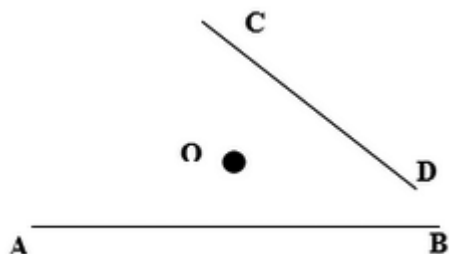


图 2-118

3. 如图2-119所示,在圆柱形的木桶外,有一个小甲虫要从桶外的A点爬到桶内的B点. 已知A点到桶口C点的距离为14厘米,B点到桶口D点的距离是10厘米,而C、D两点之间的弧长是7厘米. 如果小甲虫爬行的是最短路线,应该怎么走? 路程是多少?

4. 如图2-120所示,正方形木块上,一只蚂蚁从A点沿着棱爬到G点,它的最短路线有几条?

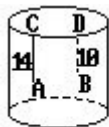


图 2-119

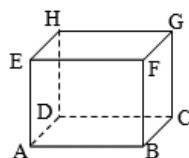


图 2-120

5. 图2-121是一张道路图,每条路上的数是小王走这段路所需的时间(单位:分). 小王从A走到B,最快需要几分钟?

6. 如图2-122所示,从A点到B点共有多少种不同的最短路线?

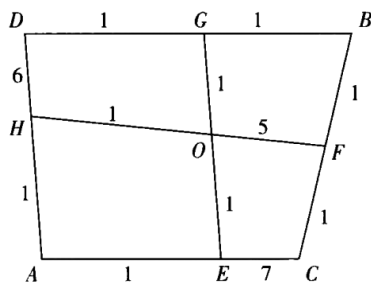


图 2-121

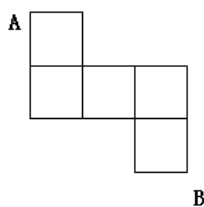


图 2-122

7. 如图2-123所示,27个单位正方体拼成大正方体,沿着表面上的格线,从A点到B点的最短路线共有多少条?

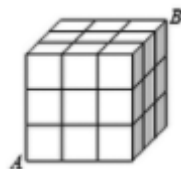


图 2-123

2.7 “拼多多”

图形游戏是对图形施行变换或构造新图形的数学活动,有利于培养空间想象能力、操作能力以及创造能力.

要解决图形游戏中的操作问题,需善于灵活运用所学的有关图形的知识,具备一定的观察图形、想象图形的能力,以及作图、动手操作等基本技能.

2.7.1 主要理论

图形的分割是指按一定大小或形状把一个图形分割成几个图形;图形的拼接是指把几个图形拼成一个新的图形.

近代伟大的数学家希尔伯特证明了以下定理:两个面积相等的多边形,可以将其中任意一个切开成有限块数,然后拼成另一个.

这个定理告诉我们,一个多边形可以切拼成一个正方形,一个正五边形可以切拼成一个正三角形,等等.但定理没告诉我们具体的分割和拼接方法.寻找图形的分割和拼接方法就成为几何学中一个有趣的问题.例如,把一个正方形分割成大小相等、形状相同的4个部分,就有无穷多种不同的分割方法.

把一个图形分割成几个形状相同的图形,或把一个图形分割后拼成另一个满足某种条件的图形,完成这样的分割和拼接,需要考虑图形分割后各部分的形状、大小及它们之间的位置关系.

2.7.2 实例分享

例 2-42 将一个长为9厘米、宽为4厘米的长方形分成相同的两块,然后拼成一个正方形.

分析与解答

因为长方形的面积为 $9 \times 4 = 36$ (平方厘米),所以拼成的正方形的边长为6厘米,因此可以把长方形的一个长边剪6厘米,另一个长边剪3厘米,分成相等的两块,拼起来就是一个正方形了.

分割和拼接的方法如图2-124和图2-125所示.

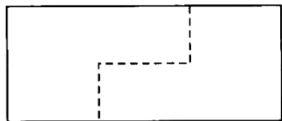


图2-124

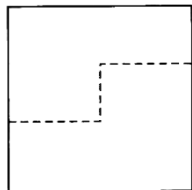


图2-125

例 2-43 将图2-126切割成3块,然后拼成一个正方形.

分析与解答

由图形可知其面积为32,因此拼成的正方形的面积也应是32,故所拼成的正方形的边

长为 $\sqrt{32}$.

当一个三角形的两直角边均为4时,根据勾股定理,其斜边长为 $\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$. 在图形中画两条直角边均为4的 $Rt\triangle ABC$,它的斜边 AB 就是正方形的边长. 过点 D 作 AB 的垂线,这样就将原来的图形分成了3块. 所拼成的正方形如图2-127所示.

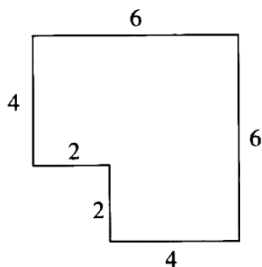


图2-126

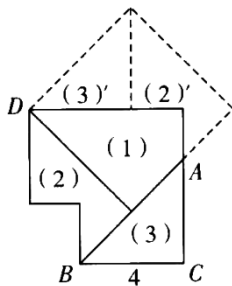


图2-127

例2-44 将图2-128切成两块,然后拼成一个正方形.

分析与解答

若设小正方形的边长为1,则拼成的正方形的面积为16,故拼成的正方形的边长为4. 而这个缺角的长方形长为6,宽为3,切分后,需将右块向左平移2个单位,再向上平移1个单位.

分割和拼接的方法如图2-129和图2-130所示.

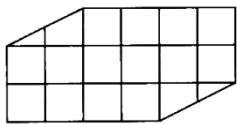


图2-128

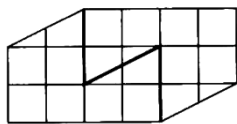


图2-129

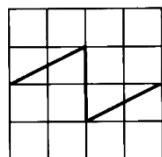


图2-130

例2-45 如图2-131由5个相同的正方形组成,请沿两条直线把它切成3块,然后拼成两个并列的正方形.

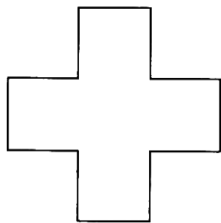


图2-131

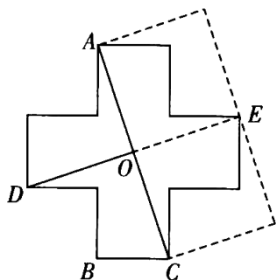


图2-132

分析与解答

因为拼成的两个并列的正方形构成一个长方形,所以其长是宽的两倍. 假设图2-131的面积为5个面积单位,长方形的长为 x 个长度单位,宽为 $\frac{x}{2}$ 个长度单位,则有 $x \times \frac{x}{2} = 5$, 即 $x^2 = 10$.

将其改写为 $x^2 = 9 + 1$, 即 $x^2 = 3^2 + 1$. 如图 2-132 所示, 连接 AC 、 DE 相交于点 O . 在 $Rt\triangle ABC$ 中, 恰好有 $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 1^2 = x^2$, 故 AC 为长方形的长. 因此, AC 、 DO 所在的直线即所求的两条直线.

分割和拼接的方法如图 2-132 所示.

此例中所做的两条直线经过十字形的中心, 并且互相垂直, 它们把图 2-131 分割成 4 个全等的图形. 因此图 2-132 绕着中心旋转 90° 也和原图重合.

一个正方形, 如果从中心沿着 $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ 角的两边切开, 就得到整个图形的 $\frac{1}{4}$, 如图 2-133 所示. 对于一个正三角形, 从它的中心沿着 $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ 的角的两边切开, 就得到整个图形的 $\frac{1}{3}$, 如图 2-134 所示. 可见, 对于一个正 n 边形, 从它的中心沿着 $\frac{360^\circ}{n}$ 角的两边切开, 就得到整个图形的 $\frac{1}{n}$. 而且这种情况也适用于绕其中心旋转 $n^\circ (n < 180)$ 角与原图形重合的图形.

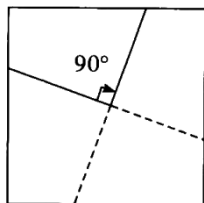


图 2-133



图 2-134

例 2-46 把如图 2-135 所示的 8×8 方格纸沿格线剪成 4 块形状大小都相同的图形, 使每一块上都有罗、牛、山 3 个字. 在图上用实线画出剪的结果.

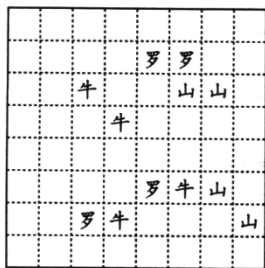


图 2-135

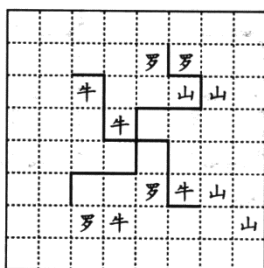


图 2-136

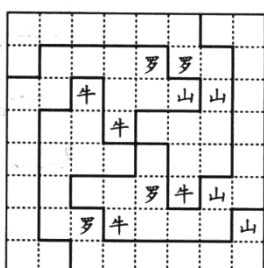


图 2-137

分析与解答

因为正方形是中心对称图形, 所分成的 4 块图形形状大小都要相同, 即①分割线必经过正方形的中心; ②每段分割线在正方形内都有关于正方形中心成中心对称的分割线; ③两个相同的字之间必有分割线, 如图 2-136 所示; ④每块图形占 $8 \times 8 \div 4 = 16$ (格), 且各有罗牛山这 3 个字的格子各一个. 依此递推, 可得如图 2-137 所示的结果.

例 2-47 下面是几个用火柴排出的错误算式, 你能只移动不多于两根火柴, 就使算式正确吗?

$$(1) \uparrow \rightarrow \uparrow \uparrow \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \uparrow \uparrow \Rightarrow \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}$$

$$(2) \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \uparrow \uparrow \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \rightarrow \uparrow \Rightarrow \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}$$

分析与解答

第(1)题只要变成 $1 + 12 - 1 = 12$ 式子就成立,所以只需把构成112的第一根火柴和前面的减号构成加法,把后面构成加法的火柴移到等号后面和2构成12即可。答案即为

$$\uparrow \uparrow \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \rightarrow \uparrow \Rightarrow \uparrow \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}$$

第2题只要变成 $4 - 2 + 1 = 3$ 式子就成立,所以只需把前面构成加号的火柴移到后面减号上,把8的一根火柴移动变成3即可。答案即为

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \uparrow \uparrow \Rightarrow \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}$$

例2-48 把火柴的长度当作1,请你用12根火柴摆出一个面积等于3的多边形。然后,再拿一些火柴,每12根一组,摆出面积分别等于4、5、7、9的4个多边形。

分析与解答

利用12根火柴,可以摆成一个边长为3、4、5的直角三角形,如图2-138所示,它的面积是 $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ 。以一根火柴为边组成的正方形的面积为1。根据这个特点,在图2-138的基础上移动火柴,可得到面积分别是 $6 - 1 = 5$ 、 $6 - 2 = 4$ 、 $6 - 3 = 3$ 的多边形,如图2-139所示。

面积为7、9的多边形的摆法如图2-140所示。

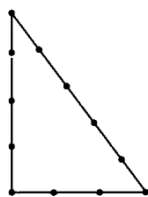


图2-138

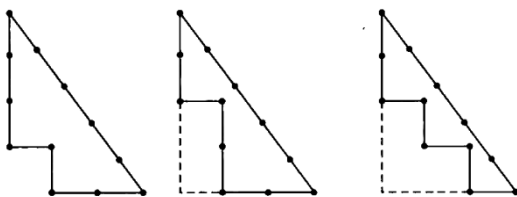


图2-139

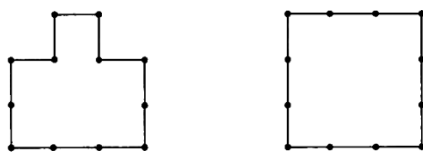


图2-140

实战演练

1. 图2-141是由多个相同的正方形组成的图形,把它们分成4个形状、大小都相同的图形.

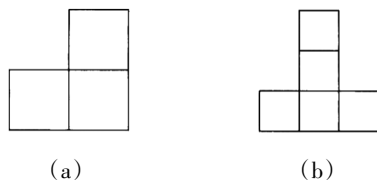


图2-141

2. 将长和宽分别为16厘米和9厘米的长方形纸片切分成两块,然后拼成一个正方形.
 3. 如图2-142所示,将图形分割成3块,然后拼成一个正方形.
 4. 如图2-143,将图形分割成两块,然后拼成一个 5×6 的长方形.

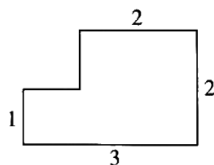


图2-142

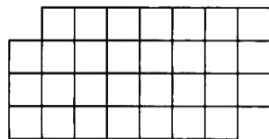


图2-143

5. 如图2-144,将图形分割成3块,然后拼成一个正方形.
 6. 如图2-145,请将“+”字形图切两刀,然后拼成一个正方形.

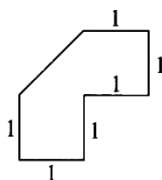


图2-144

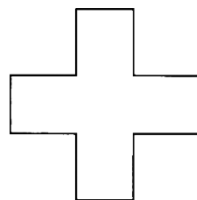


图2-145

7. 图2-146是一个等边三角形,把它分割成形状、大小都相同的3块,并且使每一块中都含有一个圆圈.
 8. 如图2-147,将已知图形分成大小、形状都相同的3块,并且使每一块里都带有一个圆圈.
 9. 如图2-148,将已知图形分成大小、形状都相同的4块,并且使每一块都要有1个1,1个2,1个3,1个4.

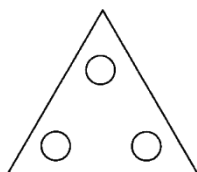


图2-146

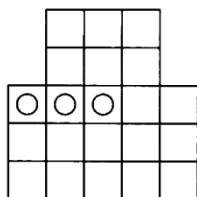


图2-147

1	2	2	1
4	4	1	3
1	3	4	4
2	3	2	3

图2-148

10. 根据 $7^2 + 2 \times 6^2 + 4^2 + 2 \times 3^2 + 3 \times 2^2 + 2 \times 1^2 = 13^2$ 可知, 边长为 13 的正方形有可能用另 11 个正方形拼成, 试画图并说明如何用这 11 个正方形拼成边长为 13 的正方形.

11. 把一个边长为 5 厘米的正方形切成 4 块, 然后拼成一个边长为 3 厘米的正方形和一个边长为 4 厘米的正方形.

12. 如图 2-149, 在 4×7 的方格内填写数字 1、2 或 3, 一个格子内填一个数字, 使得任何 4 个排成  形状的方格中所填数的和都是 7, 应怎样填?

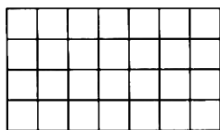


图 2-149

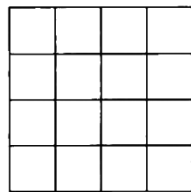
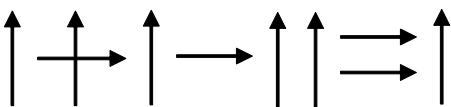
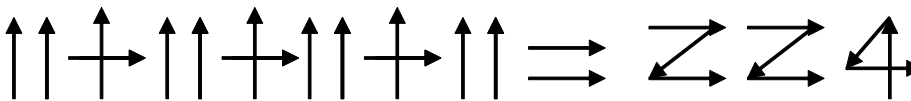


图 2-150

13. 下面是几个用火柴排出的错误算式, 你能只移动不多于两根火柴, 就使算式正确吗?

(1) 

(2) 

14. 用 24 根火柴摆成如图 2-151 所示的图形:

- (1) 拿走 8 根, 使它成为两个正方形;
- (2) 拿走 6 根, 使它成为 3 个正方形;
- (3) 拿走 8 根, 使它成为 5 个正方形;
- (4) 拿走 4 根, 使它成为 5 个正方形.

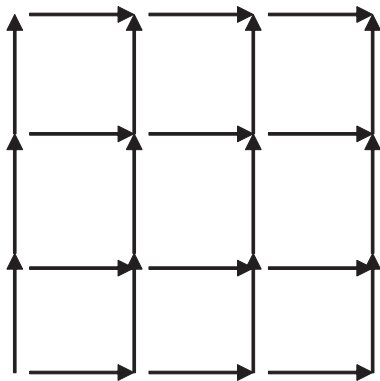


图 2-151