"十四五"普通高等教育本科部委级规划教材

新编高等数学

主　编　柳世全　陶龙风　刘德成

中国纺织出版社有限公司

图书在版编目（CIP）数据

新编高等数学 / 柳世全，陶龙风，刘德成主编. 北京：中国纺织出版社有限公司，2025．1．--（“十四五”普通高等教育本科部委级规划教材）．-- ISBN 978-7-5229-2325-3

Ⅰ．O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2024MT9399 号

责任编辑：顾文卓　向连英　　责任校对：王花妮　　责任印制：储志伟

中国纺织出版社有限公司出版发行
地址：北京市朝阳区百子湾东里 A407 号楼　邮政编码：100124
销售电话：010—67004422　传真：010—87155801
http://www.c-textilep.com
中国纺织出版社天猫旗舰店
官方微博 http://weibo.com/2119887771
三河市海新印务有限公司印刷　各地新华书店经销
2025 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
开本：787×1092　1/16　印张：12.5
字数：237 千字　定价：45.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社图书营销中心调换

前言

PREFACE

党的二十大报告指出：教育是国之大计、党之大计．培养什么人、怎样培养人、为谁培养人是教育的根本问题．育人的根本在于立德．全面贯彻党的教育方针，落实立德树人根本任务，培养德智体美劳全面发展的社会主义建设者和接班人．

本书以党的二十大报告为指引，为适应高等教育发展的需要，结合学生数学基础水平的实际，按照国家教育部对数学教育的要求，在参照经典教材的基础上编写了本书．

本书具有以下特点：

（1）知识体系完整．在编写过程中，重点突出数学的逻辑性，尊重数学发展的规律，无论是整体的知识梳理，还是具体知识点的讲解，都具有连贯性．本书用直白的语言讲述数学知识的发展、完善和再发展的过程，通俗易懂．

（2）难易适中．本书在编写过程中隐去了一些烦琐的证明，改成用直白的语言叙述，符合高职类院校对数学教学的需要；本书选择的例题简单且有代表性，充分体现了高职数学教学的特点．

（3）将课程思政融入教学中．在编写过程中，对各知识点的引入，都简单讲述了其历史发展的过程，在每章节的后面都附有学海乐园，讲述了数学史的发展过程，容易激发学生对学习数学的热情．

（4）便于学生的自学．本书章节完整，语言直白，实例具有针对性，习题具有层次性，易学易懂．

本书共有八章：第 1 章函数与极限，第 2 章导数与微分，第 3 章微分中值定理及导数的应用，第 4 章不定积分，第 5 章定积分及其应用，第 6 章常微分方程，第 7 章多元函数微分学，第 8 章二重积分．其中，第 1、第 2 章两章由柳世全老师编写，第 3、第 4、第 5 章三章由刘德成老师编写，第 6、第 7、第 8 章三章由陶龙风老师编写，全书由柳世全老师负责统稿．

本书在编写过程中，编者进行了反复校正，并得到了行内专家的指点，但由于编者水平有限，书中难免有疏漏之处，敬请广大读者提出宝贵意见和建议，以便进一步修订和完善.

编　者

2024 年 9 月

目录 CONTENTS

第1章 函数与极限

函数是近代数学发展的产物，是探讨两个量之间依赖关系的一种方法，是高等数学的研究基础．极限是研究微积分的重要工具，微积分中的许多重要概念，如导数、定积分等，均是通过极限来定义的．本章将在了解函数概念的基础上，重点介绍函数极限的概念、性质及运算．

- 函数与极限
  - 函数
    - 函数的概念
    - 函数的性质
    - 分段函数
    - 反函数
    - 复合函数
    - 初等函数
  - 数列的极限
    - 数列极限的定义
    - 数列极限的性质
    - 数列极限的运算法则
  - 函数的极限
    - 邻域
    - 自变量趋于无穷大时函数的极限
    - 自变量趋于某数时函数的极限
    - 函数极限的性质
  - 无穷小量与无穷大量
    - 无穷小量
    - 无穷大量
    - 无穷小量与无穷大量的关系
  - 极限的运算法则与计算
    - 函数极限的四则运算法则
    - 常见类型函数极限求法
    - 两个重要极限
  - 函数的连续性
    - 增量的概念
    - 连续函数的概念
    - 连续函数的性质
    - 函数的间断点

课程思政

刘徽及割圆术

刘徽(约 225—约 295)，魏晋时期伟大的数学家．他撰写的《九章算术注》就是数学史上著名的“割圆术”．刘徽的“割圆术”将极限和无穷小分割引入数学证明．割圆术是一种用圆内接正多边形面积无限逼近圆面积的方法来计算圆周率．这种方法在当时是一种创新的数学技巧，能够有效地提高圆周率的精确度．

刘徽的割圆术不仅提升了圆周率计算的精度，而且展现了魏晋时期中国数学家的高超智慧和深邃思考．它不仅是中国古代数学发展的一个亮点，也对全人类科学技术的发展作出了重要贡献．刘徽的割圆术和他的科学精神一直激励着后世学者不断追求数学真理，推动了人类文明的进步．

1.1 函数

1.1.1 函数的概念

“函数”一词是由德国数学家莱布尼茨在 1692 年最初使用；1734 年，瑞士数学家欧拉引入了函数符号“$f(x)$”；1837 年，德国数学家狄利克雷首次给出了函数的定义；1859 年，清代数学家李善兰第一次将“function”译成“函数”；19 世纪 70 年代以后，随着集合概念的出现，函数的概念得以用更严谨的语言表达．

1.1.1.1 函数的定义

在研究自然、社会或技术的过程中，常常会遇到各种不同的量，一些量在整个研究过程中，始终保持一定的数值不变，这种量称为常量；而另外一些量在研究过程中是变化的，这种量称为变量．

例如，物体做自由落体运动时，物体的质量保持不变，是常量，但物体下落的速度和距离都在变化，是变量．

在同一过程中，往往会有几个变量是同时变化的，且它们之间存在相互依赖的关系，如匀速直线运动中：$S=vt$，速度 v 是常量，路程 S 与时间 t 是变量，S 随着 t 的变化而改变，这种变量之间相互依赖的关系，用数学语言描述出来就得到了函数的定义．

定义 1 设 A，B 为两个非空数集，若对于集合 A 中的每一个变量 x，通过某种对应

法则 f，在 B 中都有唯一的变量 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

这里 x 称为自变量，y 称为因变量或函数；集合 A 称为函数的定义域，相应的 y 值的集合称为函数的值域；f 是函数符号，表示 y 与 x 的对应规则，称为函数的对应法则．有时函数符号也可以用其他字母来表示，如 $y=g(x)$ 或 $y=\varphi(x)$ 等．

由函数的定义可知，确定一个函数本质上只需要确定它的定义域和对应法则，当两个函数的定义域和对应法则相同时，即为同一函数．函数的定义域就是使函数有意义的自变量的取值范围．当 x 取某一具体值 $x_0\in A$ 时，与 x_0 对应的 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $f(x_0)$．全体函数值的集合 $M=\{y\mid y=f(x),\ x\in A\}$ 称为函数的值域．

函数的定义域、值域、对应法则称为函数的三要素．

例 1-1　判断函数 $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$ 是否为同一函数．

【解】　$y=x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，$y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域是 $[0,+\infty)$.

两函数的定义域不同，所以这两个函数不是同一函数．

例 1-2　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-x-6}$；

(2) $y=\sqrt{x^2-4}$；

(3) $y=\ln(2x-3)$；

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

【解】　(1) 函数的表达式是分式的形式，要使函数有意义，则分母不能为 0，即 $x^2-x-6\neq 0$，解得 $x\neq -2$，$x\neq 3$，所以函数的定义域是 $(-\infty,-2)\cup(-2,3)\cup(3,+\infty)$；

(2) 函数的表达式是二次根式，要使函数有意义，则被开方数为非负数，即 $x^2-4\geqslant 0$，解得 $x\leqslant -2$，或 $x\geqslant 2$，所以函数的定义域是 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$；

(3) 函数的表达式是对数形式，要使函数有意义，则对数的真数大于 0，即 $2x-3>0$，解得 $x>\dfrac{3}{2}$，所以函数的定义域是 $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$；

(4) 要使函数有意义，则 $x+2>0$，解得 $x>-2$，所以函数的定义域是 $(-2,+\infty)$.

例 1-3　设函数 $f(x)=x^2-2x-1$，求 $f(3)$，$f(m)$，$f(x+1)$ 的值．

【解】　$f(3)=3^2-2\times 3-1=2$；

$f(m)=m^2-2m-1$；

$f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)-1=x^2-2$.

1.1.1.2　函数的表示方法

函数的表示方法通常有三种：解析法、列表法、图像法．

解析法：以等量关系式的形式表示函数的方法称为解析法．如 $y=2x+1$，$y=\sin x$ 等．

列表法：以表格的形式表示函数的方法称为列表法．如通常所用的三角函数表、对数表等．

图像法：以图形的形式表示函数的方法称为图像法．在函数图像中能直观看出函数的特征和变化趋势．

1.1.2　函数的性质

一般地，为了全面了解一个函数的特征，往往需要从函数的单调性、奇偶性、周期性、有界性等方面加以研究．

1.1.2.1　单调性

函数的单调性又称为函数的增减性．

定义 2　设 D 为函数 $y=f(x)$ 的定义域，$E\subseteq D$，如果对于任意的 x_1，$x_2\in E$：

当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为 E 上的单调增函数；

当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为 E 上的单调减函数．

单调增函数和单调减函数统称为单调函数．如果 $f(x)$ 是区间 E 上的单调函数，则把区间 E 称为函数的单调区间．

例如：函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是单调减函数，$(-\infty,0]$ 是函数的单调减区间；在 $[0,+\infty)$ 上是单调增函数，$[0,+\infty)$ 是函数的单调增区间．

单调函数的图像特征：单调增函数的图像从左到右逐渐上升；单调减函数的图像从左到右逐渐下降．根据函数图像的趋势也可以判断函数的单调性．

例 1-4　判断函数 $f(x)=2x-1$ 在 $\mathbf{R}$ 上的单调性．

【解】　设 $x_1<x_2$，x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=(2x_1-1)-(2x_2-1)=2(x_1-x_2)<0,$$

即

$$f(x_1)<f(x_2),$$

从而可得函数 $f(x)=2x-1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调增函数．

1.1.2.2　奇偶性

函数的奇偶性又称为函数的对称性．

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果对于任意的 $x\in D$，都有：

$f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；

$f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数．

奇偶函数的定义域关于原点对称．既不是奇函数也不是偶函数的函数称为非奇非偶函数．

如图 1-1 所示，$y=x^3$ 是奇函数，$y=x^2$ 是偶函数．奇函数图像关于原点成中心对称，偶函数图像关于 y 轴成轴对称．

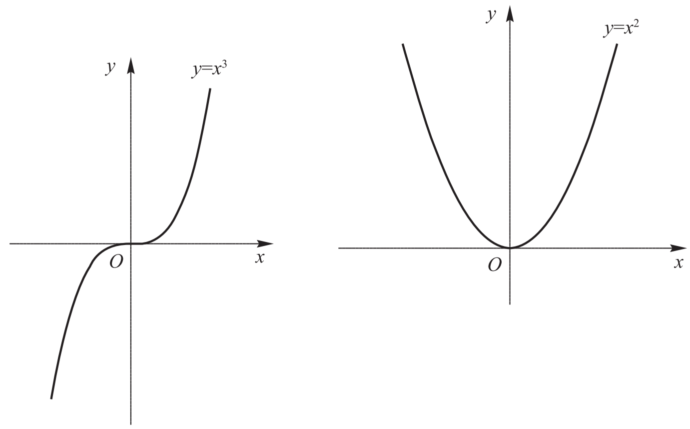


图 1-1　奇函数与偶函数图像

奇偶函数的运算性质：奇+奇=奇；偶+偶=偶；奇×奇=偶；奇×偶=奇；偶×偶=偶．

例 1-5　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x+x^3$；

(2) $f(x)=x^2+x^4$；

(3) $f(x)=x\sin x$；

(4) $f(x)=x\cos x$；

(5) $f(x)=x^2\cos x$.

【解】　以上函数的定义域均为 $\mathbf{R}$，则

(1) $f(-x)=-(x+x^3)=-f(x)$，函数 $f(x)$ 为奇函数；

(2) $f(-x)=x^2+x^4=f(x)$，函数 $f(x)$ 为偶函数；

(3) $f(-x)=x\sin x=f(x)$，函数 $f(x)$ 为偶函数；

(4) $f(-x)=-x\cos x=-f(x)$，函数 $f(x)$ 为奇函数；

(5) $f(-x)=x^2\cos x=f(x)$，函数 $f(x)$ 为偶函数．

1.1.2.3　周期性

定义 4　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的实数 T，使得对于任意的 $x\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，且 $x+T\in D$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数．

当 T 为函数的周期时，$t=mT(m\in\mathbf{Z})$ 都是函数的周期，通常所说的周期一般是指函数的最小正周期．

例如：函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的最小正周期都是 2π，函数 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 的最小正周期都是 π.

1.1.2.4 有界性

定义 5 设函数 $f(x)$ 在 E 上有定义，如果存在常数 m，M，使得对于任意的 $x\in E$，都有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 E 上有界，称 $f(x)$ 是 E 上的有界函数．

函数有界的定义也可以如下叙述：

定义 6 设函数 $f(x)$ 在 E 上有定义，如果存在正数 M，使得对于任意的 $x\in E$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 E 上有界，称 $f(x)$ 是 E 上的有界函数．

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是有界函数，因为任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $|\sin x|\leqslant 1$. 而对于函数 $y=2^x$，当 $x\in(-\infty,\ 0]$时，$0<y\leqslant 1$；当 $x\in[0,\ +\infty)$时，$y\geqslant 1$. 故当 $x\in(-\infty,\ 0]$时，函数 $y=2^x$ 是有界函数；当 $x\in[0,\ +\infty)$时，函数 $y=2^x$ 是无界函数．因此，函数的有界性是相对于某一区间而言的．

常见的有界函数有：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

1.1.3 分段函数

在函数的表达中有这样一类函数，它们在定义域的不同区间，其解析式不同，这类函数称为分段函数．例如：

(1) 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

(2) 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$

(3) 取整函数 $y=[x]=n$，$n\leqslant x<n+1$，$n\in\mathbf{Z}$.

根据取整函数的定义可以看出，记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[-1.5]=-2$，$[-0.5]=-1$，$[0.5]=0$，$[1.5]=1$ 等．

上述三个函数的图像如图 1-2 所示．

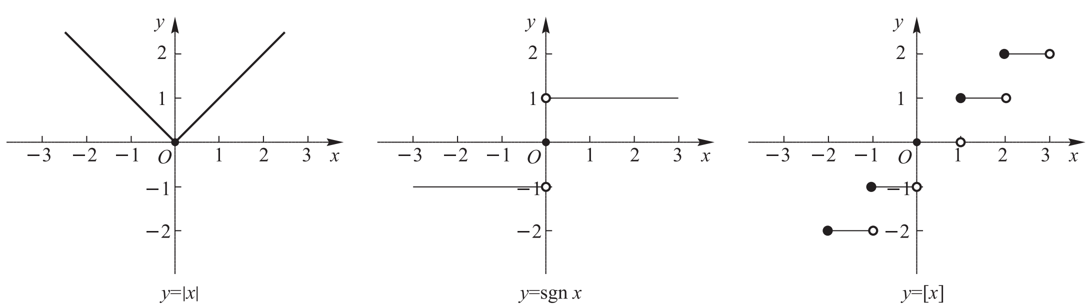


图 1-2 分段函数图像

分段函数的定义域为各段定义域的并集．如分段函数 $y=\begin{cases}-x+1, & -2\leqslant x<0\\ x-1, & 0\leqslant x<3\end{cases}$ 的定义域为 $[-2,0)\cup[0,3)=[-2,3)$.

例 1-6 设有分段函数 $y=\begin{cases}-x^2+1, & x<0,\\ 2x-1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f(2)$，$f(0)$，$f(-2)$ 的值．

【解】 $f(2)=2\times2-1=3$；

$f(0)=2\times0-1=-1$；

$f(-2)=-2^2+1=-3$.

1.1.4　反函数

在函数中，自变量与因变量的地位是相对的．例如，在函数 $y=x+1$ 中，x 是自变量，y 是因变量．由这个式子可得 $x=y-1$，这也是一个函数，此时 y 是自变量，x 是因变量．上面两个式子反映了同一变化过程中两个变量之间地位的相对性，称它们互为反函数．由此可得反函数的定义：

定义 7 设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于任意 $y\in M$，都有唯一的 $x\in D$ 与之对应，则称 x 是 y 的函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，此时称 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数．

在函数的表达式中，习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，故通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$ 的形式，即 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$.

由定义可得求反函数的步骤为：

(1) 先由 $y=f(x)$ 解得 $x=f^{-1}(y)$；

(2) 互换 x，y，得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 1-7 求 $y=2x+3$ 的反函数．

【解】 由 $y=2x+3$，得 $x=\dfrac{y-3}{2}$，所以原函数的反函数为 $y=\dfrac{x-3}{2}$.

1.1.5　复合函数

在实际问题中，有时两个变量之间的联系不是直接的．例如，在函数 $y=\sin3x$ 中，函数值不是由自变量 x 来直接确定的，而是通过 $3x$ 来确定的．如果用 u 来表示 $3x$，那么函数 $y=\sin3x$ 就可以表示成 $y=\sin u$，$u=3x$，这就说明了 y 与 x 的函数关系是通过变量 u 来确定的．我们把它称为复合函数，由此可得复合函数的定义：

定义 8 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，则称 y 是 x 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为中间变量．

一个复合函数也可以是由多个函数复合而成的，例如 $y=\ln u$，$u=v^2$，$v=x+1$，则所得的复合函数为 $y=\ln(x+1)^2$，其中 u，v 为中间变量．

利用复合函数的概念，可以把一个比较复杂的函数分解成若干个简单的函数，这给我们在探讨函数关系时带来了方便．

例 1-8 写出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{x+1}$；　　(2) $y=2e^{x^2+1}$.

【解】 (1) $y=\sqrt{u}$，$u=x+1$；

(2) $y=2u$，$u=e^v$，$v=x^2+1$.

1.1.6 初等函数

微积分研究的对象主要为初等函数，而初等函数又是由基本初等函数组成的，本节将依次介绍基本初等函数和初等函数．

我们在中学学习过的六大类函数：常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数．下面对其图像和性质作简单介绍：

1.1.6.1 常量函数 $y=c$

常量函数 $y=c$ 的图像是一条平行于 x 轴的直线，如图 1-3 所示，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，与 y 轴的交点为 $(0, c)$，它是偶函数．

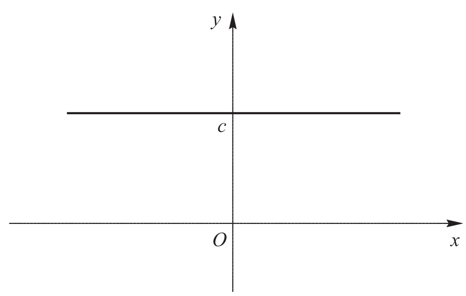


图 1-3　常量函数

1.1.6.2 幂函数 $y=x^\alpha$（α 为实数）

幂函数的共同特点比较少，当指数 α 取不同的值时，其定义域也不相同，但在第一象限，幂函数根据指数 α 的正负有相同的性质．

当 $\alpha>0$ 时，函数的图像都过原点 $(0, 0)$ 和点 $(1, 1)$，在 $(0, +\infty)$ 内是单调增函数，如图 1-4 所示．

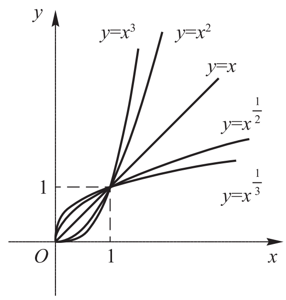


图 1-4　幂函数($\alpha>0$)

当 $\alpha<0$ 时，函数的图像都过点(1，1)，在(0，+∞)内是单调减函数，两坐标轴是其渐近线，如图 1-5 所示．

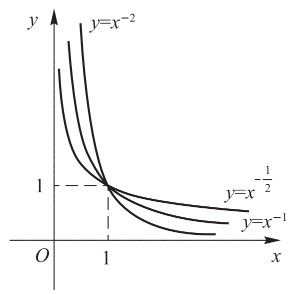


图 1-5　幂函数($\alpha<0$)

1.1.6.3　指数函数 $y=a^x$($a>0$，$a\neq1$)

它的定义域为(−∞，+∞)，值域为(0，+∞)，图像都落在 x 轴的上方，都经过点(0，1)．当 $a>1$ 时，是单调增函数；当 $0<a<1$ 时，是单调减函数，如图 1-6 所示．

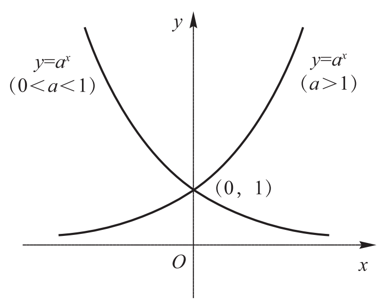


图 1-6　指数函数

1.1.6.4　对数函数 $y=\log_a x$($a>0$，$a\neq1$)

它的定义域为(0，+∞)，值域为(−∞，+∞)，图像都落在 y 轴的右边，都经过点(1，0)．当 $a>1$ 时，是单调增函数；当 $0<a<1$ 时，是单调减函数，如图 1-7 所示．

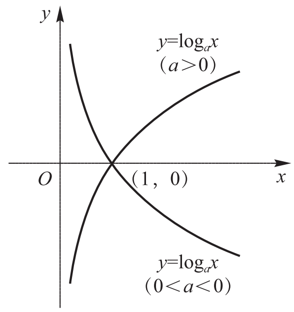


图 1-7　对数函数

1.1.6.5　三角函数

三角函数有六个，分别为：正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$，正切函数 $y=\tan x$，余切函数 $y=\cot x$，正割函数 $y=\sec x$，余割函数 $y=\csc x$.

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[-1, 1]$，是奇函数，最小正周期为 2π，是有界函数，如图 1-8 所示.

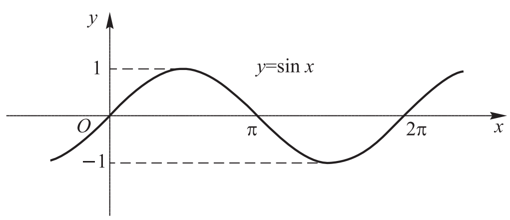


图 1-8　正弦函数

余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[-1, 1]$，是偶函数，最小正周期为 2π，是有界函数，如图 1-9 所示.

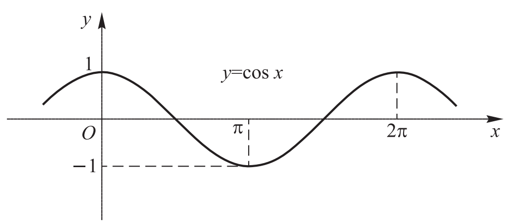


图 1-9　余弦函数

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$，值域为 $(-\infty, +\infty)$，是奇函数，最小正周期为 π，在每一个周期内是单调增函数，如图 1-10 所示.

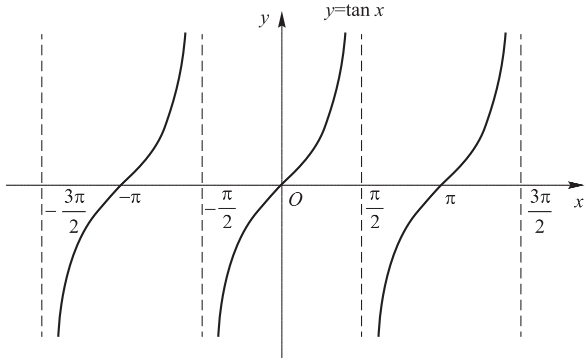


图 1-10　正切函数

余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi(k\in Z)$，值域为 $(-\infty, +\infty)$，是奇函数，最小正周期为 π，在每一个周期内是单调减函数，如图 1-11 所示 .

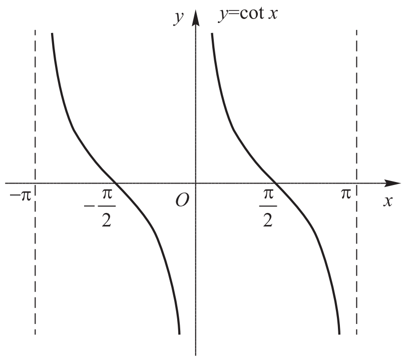


图 1-11　余切函数

三角函数之间有如下的关系：

(1) 平方关系：$\sin^2x+\cos^2x=1$；$1+\tan^2x=\sec^2x$；$1+\cot^2x=\csc^2x$.

(2) 倒数关系：$\sin x\csc x=1$；$\cos x\sec x=1$；$\tan x\cot x=1$.

1.1.6.6　反三角函数

常用的反三角函数有四个：反正弦函数 $y=\arcsin x$，反余弦函数 $y=\arccos x$，反正切函数 $y=\arctan x$，反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，它们是相应的三角函数的反函数 .

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，是单调增加的奇函数，有界，如图 1-12 所示 .

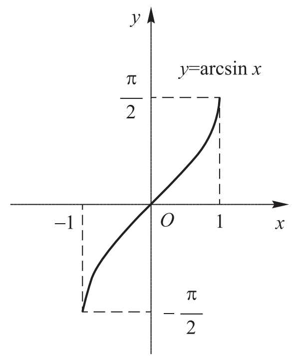


图 1-12　反正弦函数

反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $[0, \pi]$，是单调减函数，有界，如图 1-13 所示 .

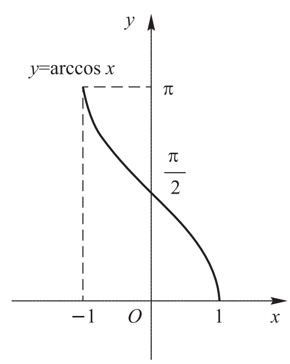


图 1-13　反余弦函数

反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$，是单调增加的奇函数，有界，如图 1-14 所示 .

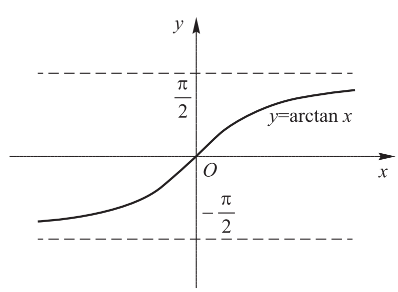


图 1-14　反正切函数

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, \pi)$，是单调减函数，有界，如图 1-15 所示 .

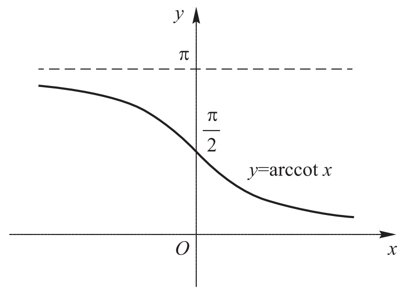


图 1-15　反余切函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的能用一个解析式表示的函数，称为初等函数．

例如，$y=\ln x+e^x$，$y=\sqrt{\sin(x^2+1)}$等都是初等函数．

分段函数一般不是初等函数，如符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 和取整函数 $y=[x]$都不是初等函数，但绝对值函数既可以分段表示 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$也可以用一个解析式表示 $y=|x|=\sqrt{x^2}$，故绝对值函数是初等函数．在后面的学习中，我们所讨论的函数一般是初等函数．

习题 1.1

一、选择题

1. 下列函数中，是相同函数的是(　　)．

A. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$与 $g(x)=x-1$　　B. $f(x)=\cos^2x$ 与 $g(x)=1-\sin^2x$

C. $f(x)=e^{\ln x}$ 与 $g(x)=x$　　D. $f(x)=\sin(\arcsin x)$与 $g(x)=x$

2. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$的定义域为(　　)．

A. $[-2, 3]$　　B. $[-3, 3]$

C. $(-2, -1)\cup(-1, 3]$　　D. $(-3, 3)$

3. 函数 $y=x^3$ 在区间$[-3, 3]$上不是(　　)．

A. 奇函数　　B. 单调函数　　C. 有界函数　　D. 周期函数

4. 函数 $y=2+\lg 3x$ 的反函数是(　　)．

A. $x=\dfrac{10^{y-2}}{3}$　　B. $x=\dfrac{e^{y-2}}{3}$　　C. $y=\dfrac{10^{x-2}}{3}$　　D. $y=\dfrac{e^{x-2}}{3}$

5. 下列函数中，是奇函数的为(　　)．

A. $y=x^4+\cos x$　　B. $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$　　C. $y=x+6$　　D. $y=|x\cos x|$

6. 下列函数中不是基本初等函数的为(　　).

A. $y=\sin(x-1)$　　B. $y=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$　　C. $y=e^{-x}$　　D. $y=10^{\sqrt{x}}$

二、填空题

1. 函数 $y=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$ 的定义域是________.

2. 设 $f(x)=x^3+x^2+1$，则 $f[f(1)]=$________.

3. 函数 $y=2e^x+1$ 的反函数是________.

4. 设 $f(x)=e^{1-x^2}$，$\varphi(x)=\cos x$，则 $f[\varphi(x)]=$________.

三、解答题

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{4x}{x^2-3x+2}$；　　(2) $y=\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$；

(3) $y=\ln\cos x$；　　(4) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}-\ln(2x-3)$.

2. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=3x^3-\sqrt[3]{x}$；　　(2) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

(3) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；　　(4) $y=x^2+x$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}-(x+1), & x\leqslant -1,\\ \sqrt{1-x^2}, & -1<x\leqslant 1,\\ 0, & x>1,\end{cases}$ 求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(2)$.

4. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　　(2) $y=\dfrac{2^x}{1+2^x}$；

(3) $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{2}\log_3 x-\dfrac{5}{2}$.

5. 指出下列各复合函数的复合过程.

(1) $y=e^{x^2}$；　　(2) $y=\tan^3(1-x)$；

(3) $y=\cos e^{\sqrt{x^2+1}}$；　　(4) $y=\sin\left(\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

1.2　数列的极限

极限是高等数学中最重要的概念之一，是研究微积分的重要工具．早在春秋战国时期，古人就有了对极限的思考．道家学派代表人物庄子在《庄子・天下篇》中记载：“一尺之棰，日取其半，万世不竭．”意思是说，把一尺长的木棒，每天取下前一天所剩的一半，如此下去，永远也取不完．也就是说，剩余部分会逐渐趋于零，但是永远不会是零，这是极限出现的雏形．

1.2.1　数列极限的定义

数列就是按照一定顺序排成的一列数：x_1，x_2，$\cdots$，x_n，$\cdots$，记作$\{x_n\}$．其中每一个数称为数列的项，第 n 项 x_n 称为数列的通项．

在给出数列极限的定义之前，我们先来看如下具体的数列：

(1) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$；

(2) $1,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^2},\ \cdots,\ \frac{1}{n^2},\ \cdots$；

(3) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$；

(4) $2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots$.

以上数列有一个共同的特点，就是随着项的无限增加，它们会无限接近于某一个常数，我们把这一类型的数列称为收敛数列，这个固定的常数称为数列的极限．于是可得数列极限的定义：

定义 9　对于数列$\{x_n\}$，当 n 无限增大时，x_n 无限趋于一常数 A，则称 A 为$\{x_n\}$的极限．记作：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \text{ 或 } x_n \to A\ (n\to\infty).$$

此时称$\{x_n\}$为收敛数列；否则，若数列$\{x_n\}$的极限不存在，则称它为发散数列．

以上四个数列的极限可表示为：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$；$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$；$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$；$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$. 常数列的极限是它本身，即$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$（$C$ 为常数）.

1.2.2 数列极限的性质

性质 1(唯一性) 若$\{x_n\}$收敛，则$\{x_n\}$极限是唯一的.

性质 2(有界性) 若$\{x_n\}$收敛，则$\{x_n\}$一定有界.

性质 3(保号性) 若$\{x_n\}$收敛于A，且$A>0$(或$A<0$)，则数列$\{x_n\}$从某项起，都有$x_n>0$(或$x_n<0$).

性质 4(夹逼定理) 若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$的极限均存在，且满足：

(1) $x_n<y_n<z_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$.

则有$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$.

1.2.3 数列极限的运算法则

定理 1 若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$的极限都存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\cdot B$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$.

推论：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(Cx_n)=C\lim\limits_{n\to\infty}x_n=CA$($C$为常数);

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^m=(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)^m=A^m$.

例 1-9 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{6n-1}$.

【解】 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{6n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{6-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}.$$

例 1-10 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$.

【解】 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}=1.$$

例 1-11 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

【解】 $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=0.$$

例 1-12 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

【解】 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1.$$

例 1-13 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

【解】 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

例 1-14 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$.

【解】 由于
$$0<\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n}<\frac{1}{n}\cdot1\cdot1\cdot\cdots\cdot1=\frac{1}{n},$$
而
$$\lim_{n\to\infty}0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$
故由夹逼定理得：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

例 1-15 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)$.

【解】 因为
$$0<\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n},$$
且
$$\lim_{n\to\infty}0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)=0.$$

例 1-16 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

【解】 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

即有

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

习题 1.2

一、选择题

1. 设 A 是一个常数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则数列 $\{x_n-A\}$ (　　).

A. 单调增加且收敛　　　B. 单调减少且收敛

C. 发散　　　D. 收敛于零

2. 当 $n\to\infty$ 时，下列数列的极限存在的是(　　).

A. $x_n=n\sin\frac{n\pi}{2}$　　　B. $x_n=n$

C. $x_n=\frac{2^n+(-1)^n}{2^n}$　　　D. $x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}$

3. 当 $n\to\infty$ 时，下列数列的极限不存在的是(　　).

A. $x_n=\sqrt{\frac{n^2+1}{n}}$　　　B. $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$

C. $x_n=\dfrac{2n+3}{n+1}$　　　　D. $x_n=\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$

二、填空题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=$ ________.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{4n^2+3}=$ ________.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]=$ ________.

三、解答题

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{n^2-1}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4}{4n^2+3}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot 3^n+3\cdot(-2)^n}{3^n}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^3+1}}{n+1}$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n}$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2})$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

1.3　函数的极限

数列可以看作是定义在正整数集上的函数，我们可以将数列的极限理论推广到函数中，并用极限理论来研究函数的变化趋势．在探讨数列极限时，其自变量 n 的变化过程只有一种，即 $n\to\infty$，但在函数 $y=f(x)$ 中，自变量 x 的变化过程有多种可能性，下面一一作说明．

1.3.1 邻域

邻域是某数附近的数组成的区间，它有两种情况：

(1)邻域．设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，则称数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域．记作 $U(a,\ \delta)$，或简记为 $U(a)$，即有：

$$U(a,\ \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,\ a+\delta).$$

点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，如图 1-16 所示．

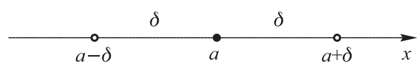


图 1-16　邻域

如：$U(2,\ 0.1)=(1.9,\ 2.1)$，表示以 2 为中心以 0.1 为半径的邻域．

(2)去心邻域．设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，则称数集 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 为点 a 的去心 δ 邻域．记作 $\mathring{U}(a,\ \delta)$，或简记为 $\mathring{U}(a)$，即有：

$$\mathring{U}(a,\ \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=\{x \mid a-\delta<x<a \cup a<x<a+\delta\}=(a-\delta,\ a)\cup(a,\ a+\delta).$$

点 a 的去心 δ 邻域即是点 a 不在邻域所表示的范围中，如图 1-17 所示．

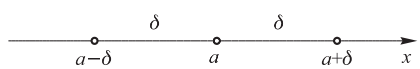


图 1-17　去心邻域

如：$\mathring{U}(2,\ 0.1)=(1.9,\ 2)\cup(2,\ 2.1)$，表示以 2 为中心以 0.1 为半径的去心邻域．

在函数极限的探讨过程中，有时需要考察点 a 左、右附近的数组成的集合，点 a 左边附近的数组成的集合称为点的左邻域，记作 $(a-\delta,\ a)$；点 a 右边附近的数组成的集合称为点的右邻域，记作 $(a,\ a+\delta)$．

1.3.2 x 趋于无穷大时函数的极限

1.3.2.1 $x\to\infty$

定义 10 如果当 $x\to\infty$（即 $|x|$ 无限增大）时，函数 $f(x)$ 的值无限趋于一个常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$．如：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$．

1.3.2.2 $x\to+\infty$

定义 11 如果当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋于一个常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$．如：$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$．

1.3.2.3　$x\to-\infty$

定义 12　如果当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋于一个常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$. 如：$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$.

定理 2　当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限为 A 的充要条件是：当 $x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的左、右极限存在且都等于 A. 即

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

例 1-17　设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0,\\ \dfrac{1}{x}, & x\geqslant0,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

【解】　因为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}2^x=0,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0.$$

例 1-18　讨论 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在 .

【解】　因为

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x\neq\lim_{x\to+\infty}\arctan x,$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在 .

1.3.3　x 趋于 x_0 时函数的极限

对于函数 $y=f(x)$，除了探讨当 $x\to\infty$ 时极限的情况，还需了解当 $x\to x_0$ 时，函数极限是否存在，下面给出当 $x\to x_0$ 时函数极限的概念：

1.3.3.1　$x\to x_0$

定义 13　设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋于一个常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

注：由定义可知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限是否存在与函数在点 x_0 处是否有定义没有关系；函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限与这点的函数值也没有关系 .

如：函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 处在点 $x=1$ 处没有定义，但 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$；

而在函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$ $f(1)=1$，但 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2.$

1.3.3.2 $x\to x_0^-$

定义 14 设 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域 $(x_0-\delta,\ x_0)$ 内有定义，如果当 $x\to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋于一个常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A.$

1.3.3.3 $x\to x_0^+$

定义 15 设 $f(x)$ 在 x_0 的右邻域 $(x_0,\ x_0+\delta)$ 内有定义，如果当 $x\to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋于一个常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A.$

定理 3 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限为 A 的充要条件是：当 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 的左、右极限存在且都等于 A. 即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

例 1-19 设 $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x<1,\\ x+1, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

【解】 因为

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x-1)=2,\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2,$$

所以

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=2,$$

故

$$\lim_{x\to 1}f(x)=2.$$

例 1-20 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-3, & x<3,\\ 2x-1, & x\geqslant 3,\end{cases}$ 讨论 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ 是否存在.

【解】 因为

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^2-3)=6,\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}(2x-1)=5,$$

所以

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)\neq\lim_{x\to 3^+}f(x).$$

由此可得 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ 不存在.

例 1-21 设 $f(x)=\begin{cases}2\cos x+a, & x<0,\\ 4x+3, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，求 a 的值.

【解】 因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2\cos x+a)=2+a,\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(4x+3)=3,$$

又

$$\lim_{x\to 0} f(x) \text{存在},$$

所以

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x),$$

即

$$2+a=3.$$

$$a=1.$$

1.3.4　函数极限的性质

性质 1(唯一性)　若函数 $f(x)$ 有极限，则极限值必唯一．

性质 2(局部有界性)　若函数 $f(x)$ 有极限，则在 x_0 的某去心邻域内有界．

性质 3(局部保号性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$(或 $A<0$)，那么在 x_0 的某去心邻域内，必有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

性质 4(夹逼定理)　若 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$，在 x_0 的某去心邻域内有定义，且有：

(1) $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$；

则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

对于当 $x\to\infty$ 时，上述结论也成立．

习题 1.3

一、选择题

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+4)=($　　$)$.

A. 4　　B. 5　　C. 8　　D. 10

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3x+1}}{x}=($　　$)$.

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. ∞

3. 设 $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x<0,\\ 1-x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=($　　$)$.

A. -1　　B. 1　　C. 3　　D. ∞

4. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处(　　).

A. 必须有定义　　B. 可以无定义

C. 不能有定义　　D. 可以有定义，但必须有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{x-2}=(\quad)$.

A. -1 B. 1 C. ∞ D. 不存在

6. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=(\quad)$.

A. ∞ B. $+\infty$ C. 0 D. 不存在

7. 下列极限存在的是( ).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}$ B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2^x-1}$ C. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$ D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x}{2x^2}=(\quad)$.

A. $\dfrac{1}{2}$ B. 2 C. 0 D. 不存在

9. 已知$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，则 a，b 的值是( ).

A. $a=-8$，$b=2$ B. $a=8$，$b=-2$

C. $a=2$，$b=-8$ D. $a=-2$，$b=8$

10. 设函数$f(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ 2-3x, & x>0,\end{cases}$则下列结论正确的是( ).

A. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ B. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$

C. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3$ D. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在

1.4 无穷小量与无穷大量

在微积分中，无穷小量是一个非常重要的概念，无穷小量与函数的极限有着密切的关系，在函数的讨论中起着重要作用，本节将系统介绍无穷小量与无穷大量.

1.4.1 无穷小量

1.4.1.1 无穷小量定义

定义 16 若函数 $f(x)$ 在自变量 x 的某个变化过程中以 0 为极限，则称在该变化过程中，$f(x)$ 为无穷小量，简称无穷小.

无穷小量即是极限为 0 的量．通常用 α、β、γ 表示无穷小量．

如：$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，即当 $x\to 0$ 时，函数 $\sin x$ 是无穷小量；$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，即当 $x\to\infty$ 时，函数$\dfrac{1}{x}$是无穷小量．

对定义的理解应注意以下两个方面：

(1)0 是唯一为无穷小量的常量；

(2)某个量是否为无穷小量与自变量的变化过程有关．例如：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，此时$\dfrac{1}{x}$是无穷小量，而$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1$，此时$\dfrac{1}{x}$就不是无穷小量．

1.4.1.2　无穷小量性质

无穷小量有以下重要性质：

(1)有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量；

(2)有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量；

(3)常量与无穷小量的乘积为无穷小量；

(4)有界变量与无穷小量的乘积为无穷小量．

定理 4　函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时，极限为 A 的充要条件是该函数可以表示成 A 与无穷小量代数和的形式．即

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha,$$

其中 α 为 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量．

证(充分性)若 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量，则 $\lim f(x)=\lim(A+\alpha)=\lim A+\lim\alpha=A+0=A.$

(必要性)若 $\lim f(x)=A$，则 $\lim[f(x)-A]=\lim f(x)-\lim A=A-A=0$，即 $f(x)-A$ 为无穷小量，令 $f(x)-A=\alpha$(α 为无穷小量)，即 $f(x)=A+\alpha.$

例 1-22　求$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

【解】　因为

当 $x\to 0$ 时，x 是无穷小量，$\sin\dfrac{1}{x}$是有界量$\left(-1\leqslant\sin\dfrac{1}{x}\leqslant 1\right)$，

所以

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

例 1-23　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arccot}x}{x}$.

【解】 因为

当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$是无穷小量，arccot$x$ 是有界量($0<\operatorname{arccot}x<\pi$)，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arccot}x}{x}=0.$$

1.4.1.3 无穷小量比较

在同一变化过程中有许多无穷小量，如：

当 $x\to0$ 时，x，x^2，$\sin x$，$\tan x$ 等都是无穷小量，但是它们趋于 0 的速度各不相同，为了区别这些无穷小量趋于 0 的速度的快慢，我们引入了无穷小量比较的概念．

定义 17 设 α，β 是同一变化过程中的两个无穷小量，且 $\beta\neq0$.

(1)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是 β 的**高阶无穷小量**，记作 $\alpha=o(\beta)$；

(2)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是 β 的**低阶无穷小量**；

(3)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c(c\neq0)$，则称 α 是 β 的**同阶无穷小量**；

(4)若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 是 β 的**等价无穷小量**，记作 $\alpha\sim\beta$.

当 $x\to0$ 时，有下列常见的等价无穷小量：

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$(1+\alpha x)^{\beta}-1\sim\alpha\beta x$.

等价无穷小量在极限运算中有重要的运用：

定理 5 (等价无穷小量替换定理) 设在同一变化过程中，$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，若 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

证 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\left(\dfrac{\alpha}{\alpha'}\cdot\dfrac{\alpha'}{\beta'}\cdot\dfrac{\beta'}{\beta}\right)=\lim\dfrac{\alpha}{\alpha'}\cdot\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}\cdot\lim\dfrac{\beta'}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

注：运用等价无穷小量替换定理时，分子分母必须是乘积的形式才可以替换，在加减运算中不能使用等价无穷小量替换定理．

例 1-24 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{\tan3x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\tan^2x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin 3x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\tan^2\dfrac{x}{3}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}{\tan x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\tan^2\dfrac{x}{3}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{x}{3}\right)^2}=9$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{4}x}{x}=\dfrac{1}{4}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

1.4.2　无穷大量

定义 18　若函数 $f(x)$ 在自变量 x 的某个变化过程中，对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称在该变化过程中，$f(x)$ 为**无穷大量**，简称无穷大．

记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）．

注：无穷大量是没有极限的量，这里只是借助极限的符号来表示．

1.4.3　无穷小量与无穷大量的关系

从无穷小量与无穷大量的定义可以看出它们之间有着密切的关系，不难看出：在同一变化过程中，无穷大量的倒数为无穷小量，不为 0 的无穷小量的倒数是无穷大量．

如：$\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x}=0$；又如：$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$．

根据以上结论，以后对于无穷大的研究我们可以通过取倒数的形式转化成对无穷小的研究．

习题 1.4

一、选择题

1. 当 $x\to 0$ 时，下列变量中与 $\sin^2 x$ 为等价无穷小量的是(　　).

A. $\sqrt{x}$　　B. x　　C. x^2　　D. x^3

2. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中与 x 等价的是(　　).

A. $1-\cos x$　　B. $\ln(1+x^2)$　　C. $\ln(1+x)$　　D. $e^{x^2}-1$

3. 当 $x\to 0$ 时，下面说法错误的是(　　).

A. $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$是无穷大量　　B. $\frac{1}{x}$是无穷大量

C. $x\sin x$ 是无穷小量　　D. $x\sin\frac{1}{x}$是无穷小量

4. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)$(　　).

A. 必为无穷小量　　B. 必为无穷大量

C. 为不等于零的常数　　D. 极限值不能确定

5. 当 $x\to -1$ 时，要使函数$(x+1)f(x)$是无穷小量，则 $f(x)$ 应为(　　).

A. 任意函数　　B. 奇函数　　C. 偶函数　　D. 有界函数

6. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=$(　　).

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D. 不存在

二、填空题

1. 当 $x\to 0$ 时，$x+\sin 2x$ 是 x 的________无穷小量.

2. 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 是 x 的________无穷小量.

3. 当 $x\to 0$ 时，$e^{2x}-1$ 是 x 的________无穷小量.

4. 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos 2x$ 与 $2\sin^2 x$ 是________无穷小量.

5. 当 $x\to 1$ 时，$1-x$ 与$\frac{1}{2}(1-x^2)$是________无穷小量.

6. 当 $x\to 1$ 时，$1-x$ 与 $1-\sqrt[3]{x}$是________无穷小量.

三、解答题

求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{5x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos^2 x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-x}{\sin 2(x-2)}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\arcsin x}{x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

1.5　极限的运算法则与计算

1.5.1　函数极限的四则运算法则

定理 6　设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则：

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\,(B\neq 0)$.

推论　(1) $\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)=CA$（$C$ 为常数）；

(2) $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$.

1.5.2　常见类型函数极限求法

1.5.2.1　直接求解法

例 1-25　求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{2x+2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\sin(\ln x)$.

【解】　(1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=2\times1+1=3$；　　(2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{-1-1}=-\dfrac{1}{2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{2x+2}=\sqrt{2+2}=2$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\sin(\ln x)=\sin(\ln 1)=\sin 0=0$.

1.5.2.2　$\dfrac{0}{0}$型未定式

如果一个函数的分子、分母极限分别为 0，则称此函数的极限为$\dfrac{0}{0}$型未定式．$\dfrac{0}{0}$型未定式的求解方法通常有两种：①因式分解．将分子、分母因式分解，约去极限为 0 的公因式；②分子或分母有理化．当分子或分母中含有根式时，进行分子或分母有理化，变形后约去极限为 0 的公因式．

例 1-26　求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3x-5}-2}{\sqrt{x-2}-1}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x-3)=-1$；

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(\sqrt{x+3}+2)}=\dfrac{1}{4}$；

(3) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)}=\lim\limits_{x\to5}(\sqrt{x-1}+2)=4$；

(4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3x-5}-2}{\sqrt{x-2}-1}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(\sqrt{3x-5}-2)(\sqrt{3x-5}+2)(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{3x-5}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)(\sqrt{3x-5}+2)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{3x-5}+2)}=\dfrac{3}{2}$.

1.5.2.3 $\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式

对于$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式，求解方法是分子、分母同除以自变量的最高次幂.

例 1-27 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x+6}{3x^2+2x-7}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x+6}{3x^3+2x-7}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x+6}{3x^2+2x-7}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x+6}{3x^2+2x-7}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}}{3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{7}{x^2}}=\dfrac{4}{3}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x+6}{3x^3+2x-7}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{6}{x^3}}{3+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{7}{x^3}}=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x+6}{3x^2+2x-7}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{6}{x^3}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{7}{x^3}}=\infty$.

由上面求解结果，可得如下结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & m=n,\\ 0, & m>n,\\ \infty, & m<n.\end{cases}$$

（以上 m，n 为正常数，a_n，$\cdots$，a_0，b_m，$\cdots$，b_0 为常数，且 $a_nb_m\neq0$）.

如：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x^2-x+7)(5x^2+1)}{(4x^2+2x-5)(2x^2-3x-1)}=\dfrac{3\times5}{4\times2}=\dfrac{15}{8}$；$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^3+x}-1}=0$.

1.5.2.4 $\infty-\infty$ 型未定式

对于 $\infty-\infty$ 型未定式，求解方法通常有两种：一是通分；二是有理化.

例 1-28 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}\right)$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$；

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}\right)&=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

1.5.3 两个重要极限

1.5.3.1 第一重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

第一重要极限有以下特点：

(1) 它是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$；

(3) x 代表的是一个代数式即有 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1.$

注：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$；$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sin x}=\infty$.

例 1-29 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2+x-6}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k\sin kx}{kx}=k$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=1$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2\sin x}=\dfrac{1}{2}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{1}{5}$.

1.5.3.2 第二重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

第二重要极限有以下特点：

(1) 它是 1^∞ 型未定式；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$；

(3) x 代表的是一个代数式即有 $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}.$

例 1-30 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{k}{x}\right)^x$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{kx}}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^x$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k=\mathrm{e}^k$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{k}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{k}{x}\right)^{-\frac{x}{k}}\right]^{-k}=\mathrm{e}^{-k}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{kx}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{k}}=e^{\frac{1}{k}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}}=\dfrac{e}{e^{2}}=e^{-1}$.

习题 1.5

一、选择题

1. $\lim\limits_{x\to -2}(3x^{2}-5x+2)=(\quad)$.

A. 12　　B. 10　　C. 8　　D. 24

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)=(\quad)$.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. ∞

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=(\quad)$.

A. $\dfrac{3}{5}$　　B. $\dfrac{1}{6}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{5}$

4. 下列极限中不正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^{2}}{x}=1$

5. 下列极限中正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$

C. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^{2}}=1$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{2}+1}{x^{2}-1}-\dfrac{\sin 2x}{x}\right)=(\quad)$.

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 3

7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=(\quad)$.

A. e^{-1}　　B. e　　C. 1　　D. -1

8. 下列极限中正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x}=\mathrm{e}$　　B. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{x}=\mathrm{e}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x}=\mathrm{e}$

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=$________.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-1}{6x^3-5x^2+7}=$________.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5}{x^3-3x^2+1}=$________.

4. 若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax+3}{2x-1}=4$，则 $a=$________.

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{bx}=$________.

6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=$________.

三、解答题

1. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-6x+5}{x-5}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^3-6x^2+5x}{x^2+2x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1-\sqrt{1+x}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x^2-1}\right)$；　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+3}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$.

2. 若$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}=4$，求 k 的值.

3. 若$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求 a，b 的值.

4. 若$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{a}{1-x^2}-\dfrac{x}{1-x}\right)=\dfrac{3}{2}$，求 a 的值.

1.6　函数的连续性

自然界中有许多现象，如气温的变化、物体的运动、植物的生长等，都是连续变化的．这种现象反映在函数关系上，就是函数的连续性．本节将具体介绍函数的连续及其性质．

1.6.1　增量的概念

定义 19　设变量 u 从它的初值 u_1 变化到终值 u_2，则称 u_2-u_1 为变量 u 的增量，记作 Δu，即 $\Delta u=u_2-u_1$.

变量的增量又称为变量的改变量或变化量．一个变量的增量可以是正，也可以是负，还可以是 0．在函数 $y=f(x)$ 中，当自变量 x 从 x_1 变到 x_2 时，自变量的增量为 $\Delta x=x_2-x_1$，对应函数的增量为 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$.

1.6.2　连续函数的概念

1.6.2.1　函数在某点连续的概念

定义 20　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续．

如图 1-18 所示，可得 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=f(x)-f(x_0)$，当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $x\to x_0$，由以上定义可得：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}f(x_0)=\lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=0,$$

即有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

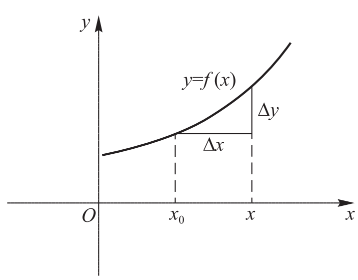


图 1-18　连续函数

故由此可得函数在某点连续的等价定义：

定义 21 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

由定义可知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续必须同时满足以下三个条件：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处有定义；

(2) $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在；

(3) $f(x)$ 在点 x_0 处的极限值等于该点的函数值.

图 1-19 中函数在点 $x=1$ 处没有定义，图 1-20 中函数在点 $x=0$ 处极限不存在，图 1-21 中函数在点 $x=1$ 处的极限不等于这点的函数值，所以上面三个函数在对应的点处不连续.

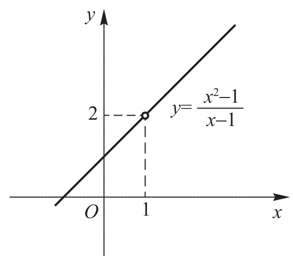


图 1-19 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

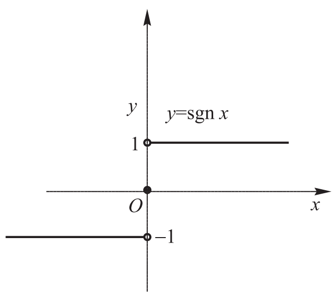


图 1-20 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

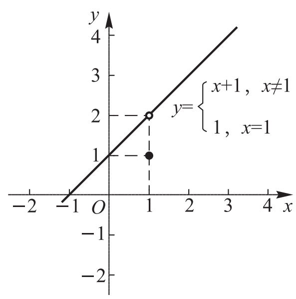


图 1-21 $y=\begin{cases}x+1, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$

1.6.2.2 函数在某点左、右连续的概念

定义 22 设函数 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0]$ 内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

定义 23 设函数 $y=f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\delta)$ 内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

定理 7 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是在点 x_0 处 $f(x)$ 既是左连续又是右连续. 即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0).$$

1.6.2.3 函数在区间上连续的概念

定义 24 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点都连续, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续.

定义 25 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续, 且在点 a 处右连续, 点 b 处左连续, 则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续.

连续函数的几何意义: 连续函数的图像是一条连续不间断的曲线.

例 1-31 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<1, \\ x^2+1, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性.

【解】 依题意, 得

$$f(1)=1^2+1=2, \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 2x=2, \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+1)=2,$$

故有

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2,$$

即

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1),$$

所以

$f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续.

例 1-32 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+a}{2}, & x<0, \\ \mathrm{e}, & x=0, \\ \dfrac{\sin bx}{ax}, & x>0,\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 求 a, b 的值.

【解】 因为 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 所以 $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=\mathrm{e}$,

又 $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x+a}{2}=\dfrac{a}{2}$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\sin bx}{ax}=\dfrac{b}{a}$, 则有 $\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{a}=\mathrm{e}$, 解得 $a=2\mathrm{e}$, $b=2\mathrm{e}^2$.

1.6.3 连续函数的性质

性质 1 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 在点 x_0 处都连续, 则函数 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$ 也在点 x_0 处连续.

性质 2 若函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续，函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

即连续函数经过四则运算或复合得到的仍是连续函数，初等函数在定义域内都是连续函数.

性质 3(最值定理) 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定存在最大值和最小值.

性质 4(零点定理) 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $\xi\in(a, b)$，使得 $f(\xi)=0$.

零点定理说明：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且两个端点一个在 x 轴的上方，另一个在 x 轴的下方，则曲线 $y=f(x)$ 一定穿过 x 轴，即与 x 轴至少有一个交点.

例 1-33 证明方程 $x^3-4x+1=0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根.

证 令 $f(x)=x^3-4x+1$，则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，又 $f(0)=1>0$，$f(1)=-2<0$，故由零点定理可知，至少存在一点 $\xi\in(0, 1)$，使得 $f(\xi)=0$. 即 ξ 为方程 $x^3-4x+1=0$ 在 $(0, 1)$ 内的一个实根.

1.6.4 函数的间断点

1.6.4.1 函数间断点的概念

定义 26 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处满足下列条件之一，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点或不连续点.

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处无定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

如：函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 处没有定义；符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 在点 $x=0$ 处极限不存在；函数 $y=\begin{cases}x+1, & x\neq 1,\\ 1, & x=1\end{cases}$ 虽然在点 $x=1$ 处有极限，但不等于这一点的函数值，以上三个函数在相应点处都是间断不连续的.

1.6.4.2 函数间断点的分类

根据函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右极限是否存在，可把函数 $f(x)$ 的间断点分为两大类：

(1) 第一类间断点. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右极限都存在的间断点，称为第一类间断点. 第一类间断点又有两种情况：

可去间断点：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右极限都存在且相等的间断点.

如：在函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 中，点 $x=1$ 为可去间断点．如果点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点，则在点 x_0 处通过补充定义的形式可将点 x_0 变为连续点．如：在函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 中补充定义可得 $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 则此函数在点 $x=1$ 处连续．

跳跃间断点：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右极限都存在但不相等的间断点．

如：符号函数 $y=\mathrm{sgn}x$ 中，点 $x=0$ 为其跳跃间断点．

(2)第二类间断点．函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右极限至少有一个不存在的间断点，称为第二类间断点．第二类间断点也有两种情况：

无穷间断点：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限或左、右极限至少有一个为无穷大的间断点．

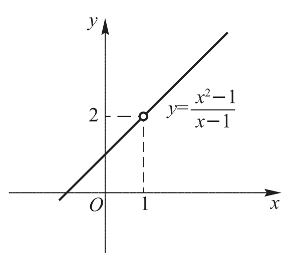
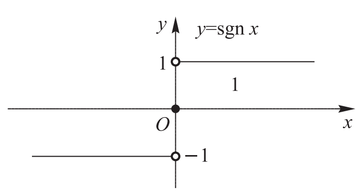
如：在函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 中，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，所以点 $x=0$ 为其无穷间断点．

振荡间断点：在函数 $f(x)$ 中，若当 $x\to x_0$ 时，函数值无限次地在两个不同的数之间变动，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的振荡间断点．

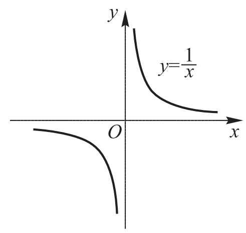
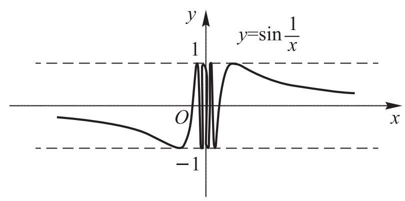
如：函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义，当 $x\to 0$ 时，函数值在 1 与 -1 之间无限次地变动，故 $x=0$ 为函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的振荡间断点．

函数的间断点类型总结见表 1-1.

表 1-1　函数的间断点类型

分类		举例函数图像	举例函数间断点
第一类间断点	可去间断点		$x=1$
	跳跃间断点		$x=0$

续表

分类		举例函数图像	举例函数间断点
第二类间断点	无穷间断点		$x=0$
	振荡间断点		$x=0$

例 1-34 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处间断点的类别.

【解】 因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x-1)=-1,\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x+1)=1,$$

则有

$$\lim_{x\to0^-}f(x)\neq\lim_{x\to0^+}f(x),$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例 1-35 找出函数 $f(x)=\frac{x-1}{x^2+x-2}$ 的间断点，并指明类型.

【解】 由 $f(x)=\frac{x-1}{x^2+x-2}=\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}$，得 $f(x)$ 的间断点为 $x=1$，$x=-2$，

又

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to-2}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to-2}\frac{1}{x+2}=\infty,$$

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，$x=-2$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

习题 1.6

一、选择题

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义是 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的(　　).

A. 充要条件　　B. 充分条件　　C. 必要条件　　D. 无关条件

2. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在是 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的(　　).

A. 充要条件　　B. 充分条件　　C. 必要条件　　D. 无关条件

3. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+k, & x\leqslant 0,\\ x^2+1, & x>0,\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $k=$(　　).

A. -1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. 1

4. $x=0$ 是函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的(　　).

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点　　C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

5. $x=2$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ 的(　　).

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点　　C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

6. 函数 $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-3x-4}$ 的间断点个数是(　　).

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的________条件.

2. 函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$ 的连续区间为________.

3. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0,\\ 3x^2-2x+k, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $k=$________.

4. 若函数 $f(x)=\begin{cases}a\cos\pi x, & x<1,\\ \dfrac{2}{x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续，则 $a=$________.

三、解答题

1. 求下列函数的间断点，并指明其类型.

(1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$;　　(2) $y=\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$;

(3) $y=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;　　(4) $y=\dfrac{|x|}{x}$;

(5) $y=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1-x}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1;\end{cases}$　　(6) $y=\begin{cases}2x-1, & x<0,\\ 2x+1, & x>0.\end{cases}$

2. 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}, & x\neq 2,\\ 3, & x=2,\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，求 a，b 的值.

复习题 1

一、选择题

1. 函数 $y=\sqrt{3-x}+\sin\sqrt{x}$ 的定义域为（　　）.

A. $[0,1]$　　B. $[0,3]$

C. $(0,1)\cup(1,3]$　　D. $[0,+\infty)$

2. 函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像（　　）.

A. 关于 x 轴对称　　B. 关于 y 轴对称

C. 关于直线 $y=x$ 对称　　D. 没有对称性

3. 当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{kx}{(2x+3)^4}$ 与 $\dfrac{1}{x^3}$ 是等价无穷小量，则常数 $k=$（　　）.

A. 16　　B. 81　　C. 8　　D. 4

4. 若当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1-ax^2}-1\sim 2x^2$，则常数 $a=$（　　）.

A. -4　　B. 0　　C. 1　　D. 不存在

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x=$（　　）.

A. e^{-2}　　B. e^{-1}　　C. 1　　D. e

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}, & x<0,\\ a(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x>0,\end{cases}$ 若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，则 $a=$（　　）.

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{e^{-1}}{2}$　　C. $\dfrac{3e^{-1}}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

7. 函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{x(x^2-4)}$ 的可去间断点个数是（　　）.

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

8. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln|x|}$ 的间断点个数是（　　）.

A. 3　　　B. 2　　　C. 1　　　D. 0

二、填空题

1. 函数 $y=\dfrac{x+2}{x-2}$的反函数是________.

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，则当________时，它为无穷小量.

3. 当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 与$\dfrac{3}{x}$为等价无穷小量，则 $\lim\limits_{x\to\infty}2xf(x)=$________.

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\pi x}{x-1}=$________.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx+d}=$________.

6. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x^2-1}$的间断点是________.

三、解答题

1. 指出下列各复合函数的复合过程.

(1) $y=\ln(\arcsin x^2)$；　　(2) $y=\arctan^3\sqrt{x-1}$.

2. 求下列数列的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

3. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-3}{x^2-3x+2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\tan(x^2-1)}{x-1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{2x}+1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

4. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{t}\right)^t$，求 $f(\ln2)$.

5. 证明方程 $xe^x-1=0$ 至少有一个小于 1 的正根.

学海乐园　函数极限的由来与发展

极限的思想是近代数学的一种重要思想，数学分析就是以极限概念为基础、极限理论

为主要工具来研究函数的一门学科.

与一切科学的思想方法一样，极限思想也是社会实践的产物.极限思想可以追溯到公元前，庄子的《逍遥游》中有“上下四方有极乎？无极之外，复无极也……”可见庄子在宏观上阐述了极限思维.公元后，刘徽的割圆术就是建立在直观基础上的一种原始的极限思想的应用；古希腊人的穷竭法也蕴含了极限思想，但由于希腊人“对无限的恐惧”，他们避免明显地“取极限”，而是借助间接证法——归谬法来完成了有关的证明.

到了16世纪，荷兰数学家斯台文在考察三角形重心的过程中改进了古希腊人的穷竭法，他借助几何直观，大胆地运用极限思想思考问题，放弃了归缪法的证明.如此，他在无意中指出了把极限方法发展成为一个实用概念的方向.

极限思想的进一步发展是与微积分的建立紧密相连的.16世纪的欧洲处于资本主义萌芽时期，生产力得到极大的发展，生产和技术中大量的问题，只用初等数学的方法已无法解决，要求数学突破只研究常量的传统范围，而提供能够用以描述和研究运动、变化过程的新工具，这是促进极限发展、建立微积分的社会背景.

起初牛顿和莱布尼茨以无穷小概念为基础建立微积分，后来因遇到了逻辑困难，所以他们在晚年都不同程度地接受了极限思想.牛顿用路程的改变量 Δs 与时间的改变量 Δt 之比 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 表示运动物体的平均速度，让 Δt 无限趋近于零，得到物体的瞬时速度，并由此引出导数概念和微分学理论.

到了18世纪，罗宾斯、达朗贝尔与罗依里埃等人先后明确地表示，必须将极限作为微积分的基础概念，并且都对极限给出过各自的定义.其中达朗贝尔的定义是：一个量是另一个量的极限，假如第二个量比任意给定的值更为接近第一个量，它接近于极限的正确定义，然而，这些人的定义都无法摆脱对几何直观的依赖.事情也只能如此，因为19世纪以前的算术和几何概念大部分都是建立在几何量的概念上面的.

首先用极限概念给出导数正确定义的是捷克数学家波尔查诺，他把函数 $f(x)$ 的导数定义为差商 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限 $f'(x)$，他强调指出 $f'(x)$ 不是两个零的商.波尔查诺的思想是有价值的，但关于极限的本质他仍未能说清楚.

到了19世纪，法国数学家柯西在前人工作的基础上，比较完整地阐述了极限概念及其理论，他在《分析教程》中指出：“当一个变量逐次所取的值无限趋于一个定值，最终使变量的值和该定值之差要多小有多小，这个定值就叫作所有其他值的极限值，特别地，当一个变量的数值(绝对值)无限地减小使之收敛到极限0，就说这个变量成为无穷小”.

为了排除极限概念中的直观痕迹，维尔斯特拉斯提出了极限的静态的定义，给微积分提供了严格的理论基础.所谓 $a_n=A$，就是指：“如果对任何 $\varepsilon>0$，总存在自然数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立”.

这个定义，借助不等式，通过 ε 和 N 之间的关系，定量地、具体地表达了两个“无限过程”之间的联系．因此，这样的定义是严格的，可以作为科学论证的基础，至今仍在数学分析书籍中使用．在该定义中，涉及的仅仅是数及其大小关系，此外只是给定、存在、任取等词语，摆脱了“趋近”一词．

极限思想揭示了变量与常量、无限与有限的对立统一关系，是唯物辩证法的对立统一规律在数学领域中的应用．借助极限思想，人们可以从有限认识无限，从“不变”认识“变”，从直线形认识曲线形，从量变认识质变，从近似认识精确．

第一章　函数与极限练习题