



智能化融媒体新形态教材

工程力学

主 编 杨 文 罗芳芝 朱雄晏



上海交通大学出版社

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书在确保经典内容的前提下，力求基本概念、基本理论和论述简明扼要，易于理解和应用。

本书共 12 章，主要包括刚体受力分析、平面汇交力系、平面力偶系、平面任意力系、轴向拉伸与压缩、剪切与挤压、扭转、弯曲、应力状态和强度理论、组合变形的强度计算、压杆稳定、动载荷与交变应力。

本书可作为高等院校工科类专业的教材，也可供相关工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

工程力学 / 杨文，罗芳芝，朱雄晏主编. -- 上海：

上海交通大学出版社，2024.10 -- ISBN 978-7-313-31192

-4

I . TB12

中国国家版本馆CIP数据核字第2024SY4918号

工程力学

GONGCHENG LIXUE

主 编：杨文 罗芳芝 朱雄晏

出版发行：上海交通大学出版社 地 址：上海市番禺路 951 号

邮政编码：200030 电 话：021-64071208

印 刷：浙江全能工艺美术印刷有限公司 经 销：全国新华书店

开 本：787 mm × 1092 mm 1/16 印 张：12.5

字 数：245 千字

版 次：2024 年 10 月第 1 版 印 次：2024 年 10 月第 1 次印刷

书 号：ISBN 978-7-313-31192-4 电子书号：ISBN 978-7-89424-804-6

定 价：49.80 元

版权所有 侵权必究

告读者：如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话：0571-89080268



工程力学是工科专业的专业基础课，不仅提供后续专业课程的基础知识，而且可以传授科学的研究方法，训练严谨的逻辑思维。

编者结合目前工科专业的教学要求和教材使用情况，对课程体系进行了优化，编写《工程力学》。在确保经典内容的前提下，确保基本概念、基本理论和论述简明扼要，易于理解和应用，力求体现以下特点。

(1) 融合课程思政理念，将拓展阅读与思政内容结合，旨在获取知识的同时，坚定理想信念、厚植爱国主义情怀、加强品德修养，提升学生的综合素养。

(2) 为方便教学，在立体的选题上由浅入深，让学生从中加深对基本概念的理解，增强对基本方法的掌握。同时，每章配有思考与练习和在线测试。

(3) 本书结合融媒体平台，丰富教学手段，使纸质教材与手机端联合应用，让学生能随时随地学习和检测学习成果。

本书共 12 章，主要包括刚体受力分析、平面汇交力系、平面力偶系、平面任意力系、轴向拉伸与压缩、剪切与挤压、扭转、弯曲、应力状态和强度理论、组合变形的强度计算、压杆稳定、动载荷与交变应力。

在本书的编写过程中，参考了大量有关工程力学的书籍，并引用了其中的资料，在此向相关作者表示感谢。本书可作为高等院校工科类专业的教材，也可供相关工程技术人员参考。

由于编者水平有限，书中难免会有不妥之处，敬请广大读者批评指正！



《工程力学》片头

编 者

2024 年 1 月



绪论	1
----	---

第1章 刚体受力分析	3
------------	---

1.1 静力学基本概念	5
1.2 静力学公理	6
1.3 约束和约束反力	9
1.4 物体的受力分析和受力图	13
思考与练习	17

第2章 平面汇交力系	20
------------	----

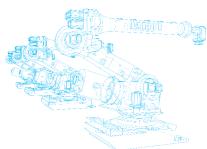
2.1 平面汇交力系合成和平衡的几何法	21
2.2 平面汇交力系合成和平衡的解析法	26
思考与练习	29

第3章 平面力偶系	33
-----------	----

3.1 力矩和合力矩定理	35
3.2 平面力偶理论	37
思考与练习	41

第4章 平面任意力系	44
------------	----

4.1 平面任意力系向作用面内任意一点简化	46
-----------------------	----



4.2 平面任意力系的简化结果	49
4.3 平面任意力系的平衡方程	50
4.4 物体系的平衡、静定和静不定问题	51
思考与练习	54

第5章 轴向拉伸与压缩 57

5.1 轴向拉伸与压缩的概念	59
5.2 轴向拉伸与压缩时横截面上的内力	60
5.3 轴向拉伸与压缩时截面上的应力	62
5.4 拉压变形与胡克定律	65
5.5 材料在拉伸与压缩时的力学性能	67
5.6 许用应力与安全系数	71
5.7 轴向拉伸与压缩时的强度计算	72
5.8 拉压超静定问题简介	76
5.9 应力集中的概念	78
思考与练习	80

第6章 剪切与挤压 82

6.1 剪切与挤压的概念	84
6.2 剪切与挤压的实用计算	85
思考与练习	91

第7章 扭转 95

7.1 扭转的概念	97
7.2 扭矩和扭矩图	98
7.3 圆轴扭转的应力及强度计算	101
7.4 圆轴扭转时的变形及刚度计算	106
思考与练习	109

第8章 弯曲.....113

8.1 弯曲的概念及梁的力学模型	115
8.2 弯曲的内力	118
8.3 剪力图和弯矩图	121
8.4 纯弯曲正应力	124
8.5 弯曲切应力	128
8.6 梁的强度条件	131
8.7 梁的刚度条件	134
思考与练习	143

第9章 应力状态和强度理论.....146

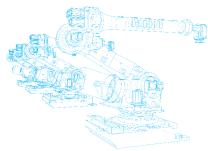
9.1 应力状态的概念	148
9.2 二向应力状态分析	150
9.3 广义胡克定律	153
9.4 强度理论简介	154
思考与练习	158

第10章 组合变形的强度计算.....160

10.1 组合变形的概念	161
10.2 拉压与弯曲组合变形的强度计算	162
10.3 扭转与弯曲组合变形的强度计算	164
思考与练习	166

第11章 压杆稳定.....169

11.1 压杆稳定的概念	170
11.2 欧拉公式	172
11.3 压杆稳定性的计算	175
11.4 提高压杆稳定性的措施	176
思考与练习	177



第 12 章 动载荷与交变应力.....180

12.1 动载荷	181
12.2 交变应力	185
思考与练习	190

参考文献.....192

平面汇交力系 第2章

静力学的主要任务就是研究力系的简化和平衡。根据力作用线的分布情况，力系可分为平面力系和空间力系两大类。平面力系是指各力作用线都位于同一平面内的力系，反之则称为空间力系。在平面力系中，若各力作用线汇交于一个公共点，则称该力系为平面汇交力系。平面汇交力系是一种比较简单的、在工程中常见的力系。它的简化理论是研究平面任意力系的基础。本任务将分别用几何法与解析法研究平面汇交力系的合成与平衡问题。

课程思政

三峡大坝的力学问题



三峡大坝的力学问题

三峡大坝是当今世界上最大的水利枢纽建筑之一。

在三峡大坝的设计和建设中遇到的工程力学问题是复杂且多层次的问题，涉及水力学、土力学、岩石力学、结构力学等多个领域。

三峡大坝是一项伟大的工程成就，它展示了中国人民的智慧和勇气，也为中国的经济发展和环境保护做出了重要的贡献。劳动人民用智慧和勤奋，不断挑战和突破自己的极限，体现了精益求精、追求卓越的工匠精神和不畏艰苦、勇承担责任的担当精神。

知识目标

理解力在平面直角坐标系中投影的概念。

了解平面汇交力系合成和平衡的几何法。

熟练掌握平面汇交力系合成和平衡的解析法。

能力目标

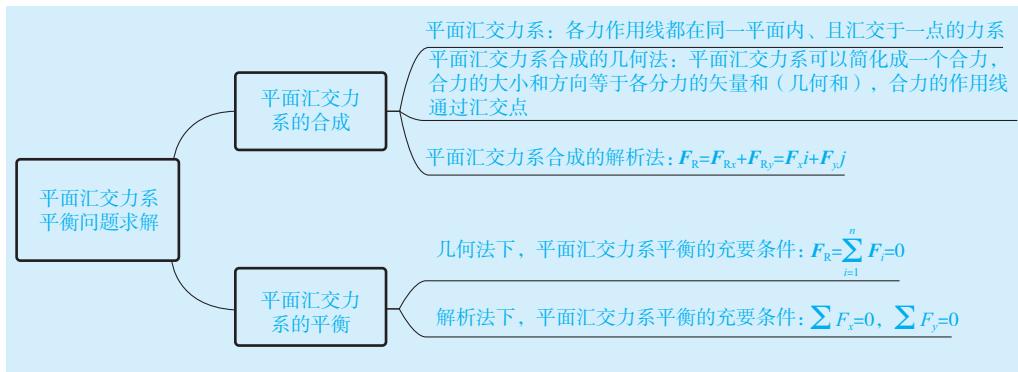
能熟练计算力在平面直角坐标系中的投影。

具备应用平面汇交力系平衡条件分析平衡问题的能力。



笔记

内容框架



工程案例

随着现代科技的迅速发展，工业生产规模的不断扩大，作为物料搬运重要设备的起重机在现代化生产过程中的应用越来越广，作用越来越大。图 2-1 所示为建筑工程中较为常见的一款简易起重机，起重机 BAC 上装有定滑轮，绳子跨过滑轮，重力 $G=20 \text{ kN}$ 的重物通过绳子用绞车吊起，A、B、C 处均采用铰链连接，不计杆和滑轮的重力，试分析当重物匀速上升时杆 AB 和 AC 所受的力。

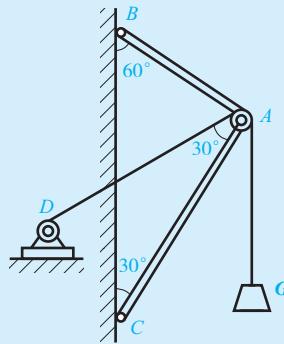
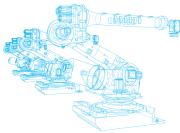


图 2-1 简易起重机

2.1 平面汇交力系合成和平衡的几何法

2.1.1 力在平面直角坐标系中的投影

力在平面直角坐标系中投影的概念。设力 \mathbf{F} 作用在物体的 A 点，如图 2-2 所示，在力 \mathbf{F} 作用线所在平面内建立直角坐标系 Oxy ，从力 \mathbf{F} 的起点 A 和终点 B 分别向 x 轴和 y 轴做垂线，得垂足 a 、 b 和 a' 、 b' 。线段 ab 加上正号或负号，称为力



\mathbf{F} 在 x 轴上的投影，用 F_x 表示；线段 $a'b'$ 加上正号或负号，称为力 \mathbf{F} 在 y 轴上的投影，用 F_y 表示。

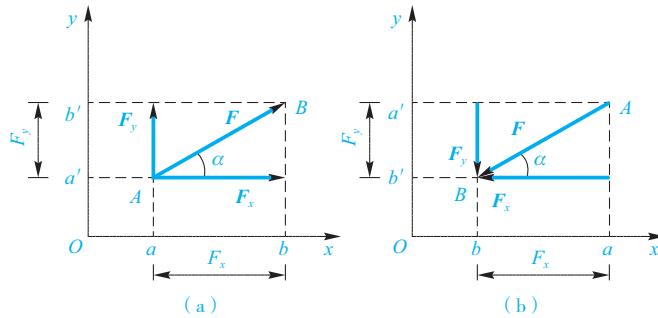


图 2-2 力在平面直角坐标系中投影

力的投影是代数量，其正负规定如下：当力的起点到终点投影的方向与坐标轴的正方向一致时，投影为正；反之为负。由图 2-2 可知，投影 F_x 、 F_y 可用下列式子计算

$$\left. \begin{array}{l} F_x = \pm F \cos \alpha \\ F_y = \pm F \sin \alpha \end{array} \right\} \quad (2-1)$$

式中， α 为力 \mathbf{F} 与 x 轴所夹的锐角。

力在坐标轴上的投影有以下两种特殊情况。

(1) 当力与坐标轴垂直时，力在坐标轴上的投影等于零。

(2) 当力与坐标轴平行时，力在坐标轴上投影的绝对值等于力的大小。

如果已知力 \mathbf{F} 在坐标轴上的投影为 F_x 和 F_y ，则力 \mathbf{F} 的大小和方向可由下式确定

$$\left. \begin{array}{l} F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \tan \alpha = \left| \frac{F_y}{F_x} \right| \end{array} \right\} \quad (2-2)$$

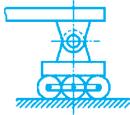
式中， α 为 \mathbf{F} 与 x 轴所夹的锐角，力 \mathbf{F} 的指向可由投影 F_x 和 F_y 的正负号确定。

显而易见，投影 F_x (F_y) 的绝对值等于分力 \mathbf{F}_x (\mathbf{F}_y) 的大小，投影 F_x (F_y) 的正负号指明了分力 \mathbf{F}_x (\mathbf{F}_y) 是沿该轴的正向还是反向。可见，利用力在坐标轴上的投影可以同时表明力沿直角坐标轴分解时分力的大小和方向。

注意：分力是力矢量，而投影是代数量。若分力指向与坐标轴同向，投影为正，反之为负。分力的作用点在原力作用点上，而投影与力作用点位置无关。

2.1.2 力多边形法则

设作用于刚体上且平面汇交于点 O 的力为 \mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 、 \mathbf{F}_3 、 \mathbf{F}_4 ，如图 2-3(a) 所示。



笔记

求该力系合力时, 可连续运用力的三角形法则, 将这些力依次相加, 便可以得到合力的大小和方向。

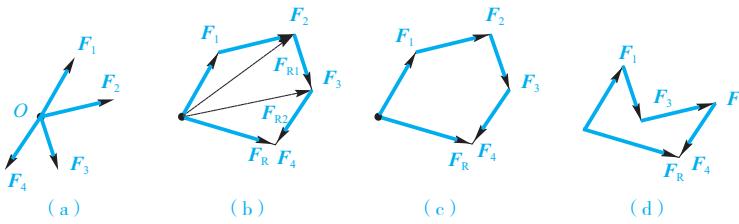


图 2-3 力多边形法则

首先, 将 F_1 、 F_2 合成得到它们的合力矢 F_{R1} ; 其次, 将 F_{R1} 、 F_3 合成得到它们的合力矢 F_{R2} ; 最后, 将 F_{R2} 、 F_4 合成得到力系的合力矢 F_R , 如图 2-3(b)所示。

从图 2-3(c)可以看出, 在求该力系的合力矢 F_R 时, 更简单的办法是, 在由 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 构成的开口多边形中, 连接第 1 个力 F_1 的起点和最后一个力 F_4 的终点, 得到的矢量即为合力矢 F_R 。由各分力矢构成的多边形称为力多边形。这种用力多边形求合力 F_R 的作图规则称为 **力多边形法则**, 这种作图方法称为几何法。

总之, **平面汇交力系可以简化成一个合力, 合力的大小和方向等于各分力的矢量和(几何和), 合力的作用线通过汇交点**。如果该平面汇交力系有 n 个力组成, 用 F_R 表示该力系的合力矢, 则有

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i$$

或简写成

$$F_R = \sum F \quad (2-3)$$

合力 F_R 对刚体的作用与原有力系对该刚体的作用等效。

画力的多边形时, 若改变各分力相加的顺序, 将得到形状不同的力的多边形, 但最后求得的合力不变, 图 2-3(d)所示为另一种分力相加的方式。

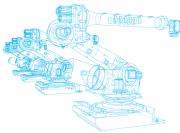
2.1.3 平面汇交力系平衡的几何条件

作用在物体上的一个平面汇交力系可以合成为一个合力, 当合力等于零时, 该物体处于平衡状态, 此平面汇交力系为一个平衡力系。由此可得出平面汇交力系平衡的充要条件是: 该力系的合力等于零, 即

$$F_R = \sum F = 0 \quad (2-4)$$

由几何作图可知, **平面汇交力系平衡时, 由力系中各分力构成的力多边形自行闭合, 这就是平面汇交力系平衡的几何条件**。

求解平面汇交力系的平衡问题时, 可用几何法, 即按比例先画出封闭的力多边



形, 然后用直尺和量角器在图上量取要求的未知量, 也可根据图形的几何关系, 用三角函数公式计算出未知量。

下面结合例题, 说明如何利用几何法求解平面汇交力系的平衡问题。

【例 2-1】 如图 2-4(a)所示, 圆柱滚子重力 $P=20 \text{ kN}$, 半径 $r=60 \text{ cm}$, 若要它能越过高 $h=8 \text{ cm}$ 的台阶, 拉力 F 至少为多少?

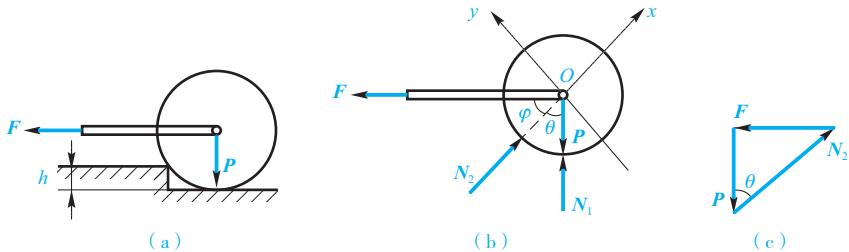


图 2-4 例 2-1 图

【解】 (1) 以圆柱滚子为研究对象。

(2) 对研究对象进行受力分析。受力情况如图 2-4(b)所示。

(3) 利用平衡条件画出力多边形。圆柱滚子能越过台阶时, 地面对滚子的约束反力 $N_1=0$ 。此时由重力 P 、拉力 F 以及台阶对滚子的约束反力 N_2 构成的力三角形如图 2-4(c)所示。

(4) 利用图形中的几何关系求解未知量。

$$F = P \tan \theta = P \cdot \frac{\sqrt{r^2 - (r-h)^2}}{r-h} = 11.5 \text{ kN}$$

故若要滚子能越过台阶, 拉力 F 的大小至少为 11.5 kN。

【例 2-2】 如图 2-5(a)所示, 水平梁 AB 中点 C 作用力 P , 其大小等于 20 kN, 方向与梁的轴线成 60° 角, 试求固定铰支座 A 和滚动支座 B 的约束反力。

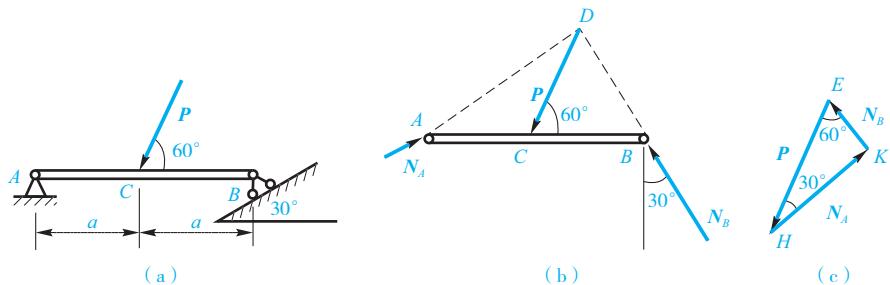


图 2-5 例 2-2 图

【解】 (1) 以梁 AB 为研究对象。

(2) 对研究对象进行受力分析。此时由主动力 P 、固定铰支座 A 处的约束反力



笔记

N_A 以及滚动铰支座 B 处的约束反力 N_B 构成平衡力系，且三力汇交于点 D ，梁 AB 的受力情况如图 2-5(b) 所示。

(3) 利用平衡条件画出力多边形。由 P 、 N_A 和 N_B 构成的力三角形如图 2-5(c) 所示。

(4) 利用图形中的几何关系求解未知量。

$$N_A = P \cos 30^\circ = 17.3 \text{ kN}, \quad N_B = P \sin 30^\circ = 10 \text{ kN}$$

故固定铰支座 A 和滚动支座 B 的约束反力大小分别为 17.3 kN 和 10 kN，方向如图 2-5(b) 所示。

【例 2-3】 如图 2-6(a) 所示，电动机重力 $P = 5 \text{ kN}$ ，放在水平梁 AC 中央。梁的 A 端用铰链固定，另一端用支撑杆 BC 支撑，支撑杆与水平梁轴线成 30° 角，忽略梁和支撑杆所受的重力，试求圆柱铰支座 C 以及固定铰支座 A 的约束反力。

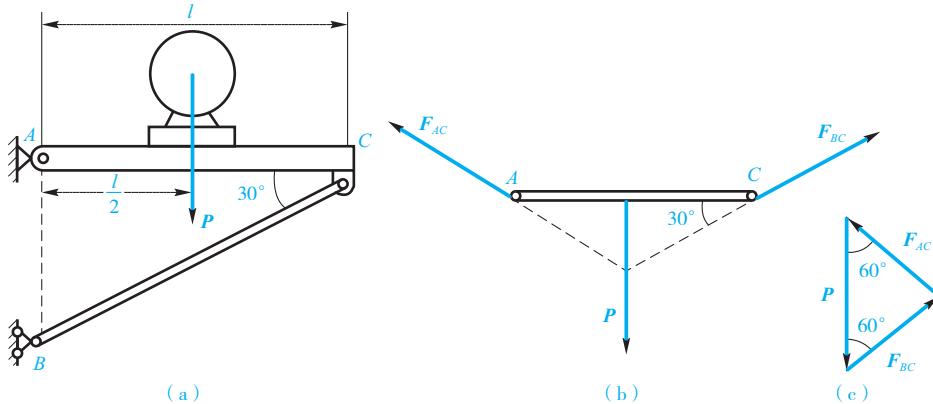


图 2-6 例 2-3 图

【解】 (1) 以梁 AC 为研究对象。

(2) 对研究对象进行受力分析。此时由重力 P 、圆柱铰支座 C 处的约束反力 F_{BC} 以及固定铰支座 A 处的约束反力 F_{AC} 构成平衡力系，且三力汇交于一点。梁 AC 的受力情况如图 2-6(b) 所示。

(3) 利用平衡条件画出力多边形。由 P 、 F_{BC} 和 F_{AC} 构成的力三角形如图 2-6(c) 所示。

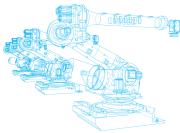
(4) 利用图形中的几何关系求解未知量。

$$F_{BC} = P = 5 \text{ kN}, \quad F_{AC} = P = 5 \text{ kN}$$

方向如图 2-6(b) 所示。

由上述例题，可以总结出利用几何法求解平面汇交力系问题的一般步骤。

(1) 确定研究对象。根据问题中已知和未知各力的作用位置，选取相关物体为研究对象，并把它从周围物体中分离出来。



(2)画受力图。在所确定的研究对象上，画出其所受各力，包括所有主动力和约束反力。

(3)作力多边形。从已知力出发，按力矢量首尾相连的原则，构成一条折线；然后按照力多边形闭合的要求，确定未知力的大小和方向。

(4)求解未知力。利用力多边形中显示的几何关系求解未知力。

2.2 平面汇交力系合成和平衡的解析法

2.2.1 平面汇交力系合成的解析法

设由 n 个力组成的平面汇交力系作用于刚体上，那么此力系的合力 \mathbf{F}_R 在直角坐标系中的解析表达式为

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{Rx} + \mathbf{F}_{Ry} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} \quad (2-5)$$

其中， \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 分别为沿坐标轴 x 、 y 正方向的单位矢量。 F_x 、 F_y 为合力 \mathbf{F}_R 在 x 、 y 轴上的投影，并有

$$F_x = F_R \cos \theta, \quad F_y = F_R \sin \theta \quad (2-6)$$

其中， θ 为合力 \mathbf{F}_R 与 x 轴的夹角。

应用平面汇交力系几何法合成的力多边形可以证明如下定理：**合力在某轴上的投影等于各分力在该轴上投影的代数和，该定理称为合力投影定理**。将式(2-5)分别向 x 、 y 轴上投影，可得

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F_{x1} + F_{x2} + \cdots + F_{xn} = \sum_{i=1}^n F_{xi} \\ F_y &= F_{y1} + F_{y2} + \cdots + F_{yn} = \sum_{j=1}^n F_{yj} \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

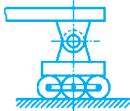
其中， F_{x1} 和 F_{y1} ， F_{x2} 和 F_{y2} ， \cdots ， F_{xN} 和 F_{yN} 分别为各分力在 x 轴和 y 轴上投影。

合力的大小和方向余弦分别为

$$\left. \begin{aligned} F_R &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(\sum F_{xi})^2 + (\sum F_{yj})^2} \\ \cos(\mathbf{F}_R, \mathbf{i}) &= \frac{F_x}{F_R}, \quad \cos(\mathbf{F}_R, \mathbf{j}) = \frac{F_y}{F_R} \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

2.2.2 平面汇交力系的平衡方程

由平面汇交力系平衡的充要条件 $F=0$ ，得



笔记

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right\} \quad (2-9)$$

式(2-9)即为平面汇交力系的平衡方程。

故以解析法表示的平面汇交力系平衡的充要条件是：**各力在两坐标轴上投影的代数和分别等于零。**

下面结合实例，说明如何利用解析法求解平面汇交力系的平衡问题。

【例 2-4】 如图 2-7(a)所示，C 为杆 BD 的中点，试求杆 BD 在 B、C 处所受的力。

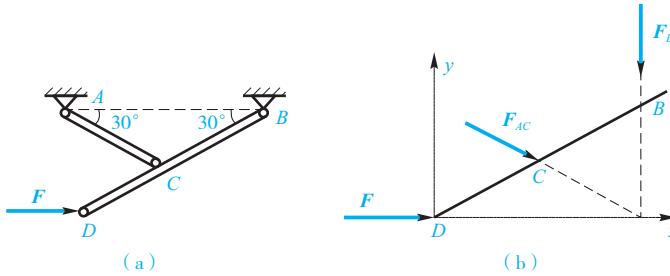


图 2-7 例 2-4 插图

【解】 (1) 以杆 BD 为研究对象。

(2) 对研究对象进行受力分析。AC 杆为二力杆，C 处约束反力 F_{AC} 应沿 AC 轴线方向。此时由主动力 F 、固定铰支座 B 处的约束反力 F_B 以及圆柱铰支座 C 处的约束反力 F_{AC} 构成平衡力系，且三力汇交于一点，杆 BD 的受力情况如图 2-7(b)所示。

(3) 建立直角坐标系，列出平衡方程。

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_x = F + F_{AC} \cos 30^\circ = 0 \\ \sum F_y = -F_B - F_{AC} \sin 30^\circ = 0 \end{array} \right\}$$

(4) 由上述平衡方程可得

$$F_B = \frac{1}{\sqrt{3}}F, \quad F_{AC} = -\frac{2}{\sqrt{3}}F$$

F_{AC} 为负值，说明杆 BD 在 C 处所受约束反力方向与图示方向相反。

【例 2-5】 如图 2-8(a)所示，已知压板夹紧力 $F=400$ N，不计工件自重，试求工件对 V 形铁的压力。

【解】 (1) 以工件为研究对象。

(2) 对研究对象进行受力分析。由主动力 F ，V 形铁在 A、B 处对工件的约束反力 N_A 和 N_B 构成平衡力系，且三力汇交于圆心。工件的受力情况如图 2-8(b)所示。

(3) 建立直角坐标系，列出平衡方程。

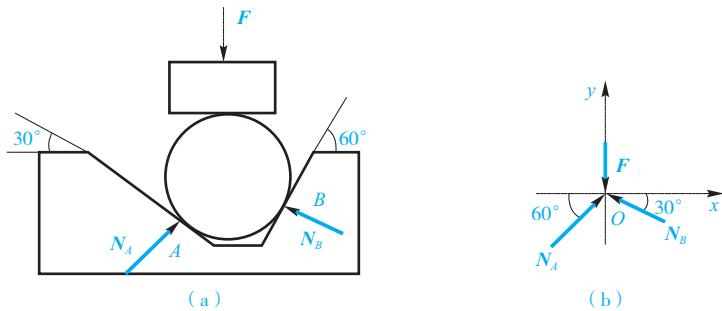
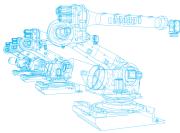


图 2-8 例 2-5 插图

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_x = N_A \cos 60^\circ - N_B \cos 30^\circ = 0 \\ \sum F_y = F - N_A \sin 60^\circ - N_B \sin 30^\circ = 0 \end{array} \right\}$$

(4) 由上述平衡方程可得

$$N_A = \frac{\sqrt{3}}{2}F = 200\sqrt{3} \text{ N}, \quad N_B = \frac{F}{2} = 200 \text{ N}$$

方向如图 2-8(b) 所示。



工程案例分析

(1) 以铰链 A 为研究对象。

(2) 对研究对象进行受力分析。如图 2-9 所示, 由于杆 AC 和 AB 均为二力杆, 它们在 A 处的约束反力 F_1 和 F_2 均应沿各自轴线方向, 所以约束反力 F_1 、 F_2 、 T 和主动力 G 在 A 处构成平衡力系。A 的受力情况如图 2-9(b) 所示。

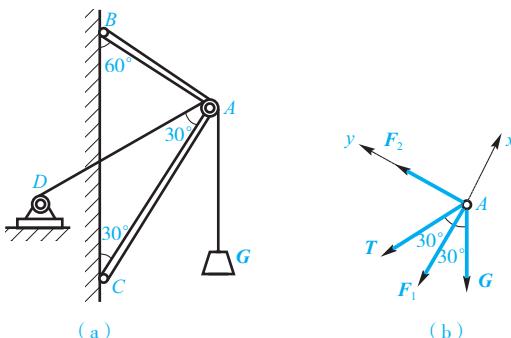
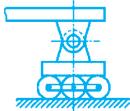


图 2-9 简易起重机的受力分析

(3) 建立直角坐标系, 列出平衡方程。

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_x = -F_1 - T \cos 30^\circ - G \cos 30^\circ = 0 \\ \sum F_y = F_2 + T \sin 30^\circ - G \sin 30^\circ = 0 \end{array} \right\}$$



笔记

由绳索类约束的约束反力特点可知: $T=G$ 。

(4) 由上述平衡方程可得

$$F_1 = -34.6 \text{ kN}, F_2 = 0$$

F_1 为负, 说明 AC 杆的约束反力方向与图示方向相反, 即 F_1 为压力, 大小为 34.6 kN ; 杆 AB 受力为零。

由上述例题, 可以总结出利用几何法求解平面汇交力系问题的一般步骤。

第一步, 确定研究对象。

第二步, 对研究对象进行受力分析, 并画出受力图。

第三步, 建立适当的坐标系, 求合力的投影或列出平衡方程。为方便计算, 所选的坐标系的一条轴尽量与某个未知力平行或垂直, 以避免方程的联立求解。

第四步, 利用平衡方程可求得结果。所求结果的绝对值表示未知力的大小, 正、负号表示第二步中所假设的力的方向是否与实际一致, 正号表示一致, 负号表示其方向刚好相反。



思考与练习

2-1 已知 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 的作用线汇交于一点, 其力多边形如图 2-10 所示, 试问这两种力多边形的意义有何不同?

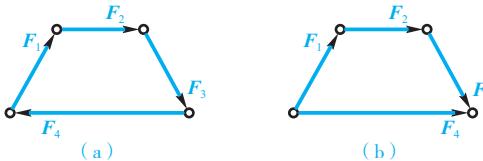


图 2-10 题 2-1 图

2-2 用解析法求平面汇交力系的合力时, 若取不同的直角坐标轴, 所求得的合力是否相同?

2-3 如图 2-11 所示固定环, 受到来自三根钢绳的拉力。拉力分别为 $F_1=500 \text{ N}$, $F_2=1 \text{ kN}$, $F_3=2 \text{ kN}$, 求固定环受钢绳作用的合力 F_R 。

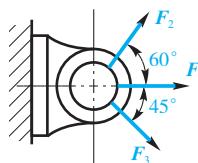
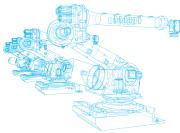


图 2-11 题 2-3 图



在线测试



2-4 如图 2-12 所示支架由杆 AB、BC 组成, A、B、C 处均为光滑铰链, 在铰 B 上悬挂重物 $G=10$ kN, 杆件自重不计, 试求杆件 AB、BC 所受的力。

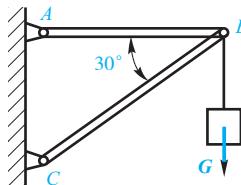


图 2-12 题 2-4 图

2-5 如图 2-13 所示钢绳吊起重力为 G 的物体, 求钢绳 AB、AC 所受的拉力。

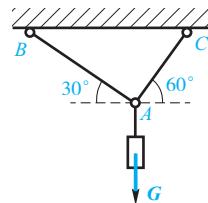


图 2-13 题 2-5 图

2-6 如图 2-14 所示重力为 G 的球体放在倾角为 60° 的光滑斜面上, 并用绳 BC 系住, BC 与斜面平行, 试求绳 BC 的拉力 F_T 及球体对斜面的压力 F_N 。

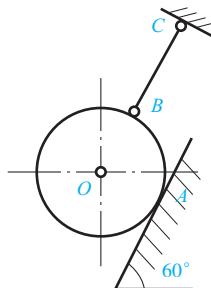


图 2-14 题 2-6 图

2-7 如图 2-15 所示平面汇交力系, 求该力系的合力。

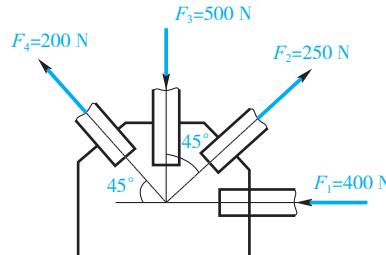


图 2-15 题 2-7 图



笔记

2-8 如图 2-16 所示, 三铰门式钢架受集中力 P 作用, 不计钢架自重, 试求图示两种情况下支座 A、B 的约束力。

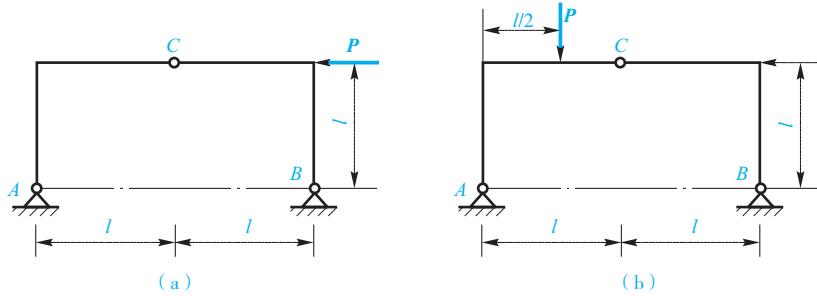


图 2-16 题 2-8 图

2-9 如图 2-17 所示简支梁受集中力 $P=50 \text{ kN}$ 作用, 求图示两种情况下支座 A、B 的约束力。

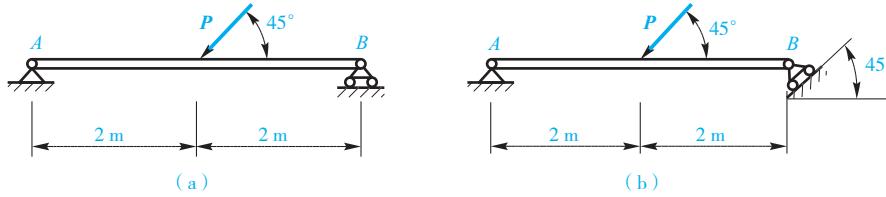


图 2-17 题 2-9 图

2-10 如图 2-18 所示液压夹紧机构中, D 为固定铰链, B、C、E 为活动铰链。已知力 F 与机构平衡时的角度如图所示, 求工件 H 所受的夹紧力。

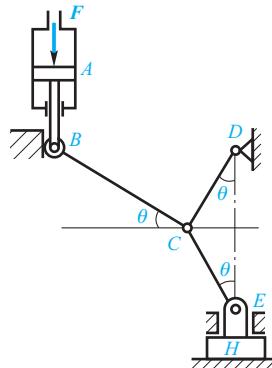
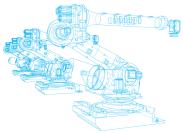


图 2-18 题 2-10 图



2-11 固定于墙内的环形螺钉上，作用有3个力，分别为 F_1 、 F_2 、 F_3 ，各力的方向如图2-19所示；各力的大小分别为 $F_1=3\text{ kN}$ ， $F_2=4\text{ kN}$ ， $F_3=5\text{ kN}$ 。试求螺钉作用在墙上的力。

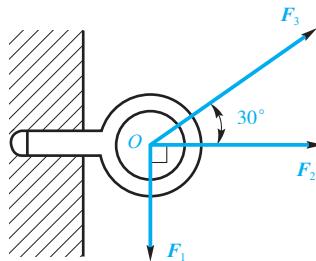


图 2-19 题 2-11 图

第3章 平面力偶系

力对刚体的作用效应包括内效应和外效应两方面，其中外效应是使刚体的运动状态发生改变(包括移动和转动)。当力的作用线通过物体的质心时，将使物体在力的方向上平动；当力的作用线不通过物体的质心时，物体将在力的作用下边平动边转动。例如汽车司机旋转方向盘、钳工用丝锥攻螺纹等都属于物体在力的作用下产生的转动效应。

本章将重点研究力对物体的转动效应，引入力矩、力偶、力偶矩等概念，利用力偶的性质与力偶的等效条件，分析平面力偶系的平衡条件，从而完成平面力偶系平衡问题求解。

课程思政

C919——全球航空市场的一张新名片

C919飞机是中国按照国际民航规章自行研制、具有自主知识产权的大型喷气式民用飞机。对中国航空工业和世界航空工业来说，C919的研制成功都是一个重要的里程碑。

C919的研发过程中融入了大量的力学知识。飞机本身的飞行及控制涉及流体力学，同时还涉及噪声控制、热管理、环境控制等相关方面的知识。

在C919的研制过程中，中国工匠们付出了巨大的努力和辛勤的汗水。他们克服了各种困难和挑战，不断追求卓越和创新。他们用自己的技能和智慧，为C919的成功研制打下了坚实的基础。



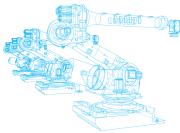
C919——
全球航空市
场的一张
新名片

知识目标

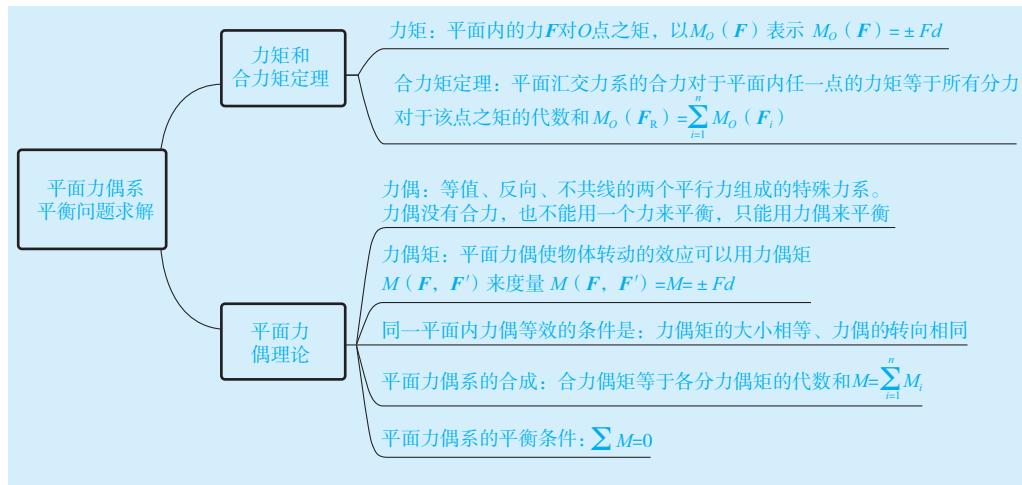
- 理解力矩、力偶和力偶矩的概念。
- 理解合力矩定理，熟练掌握平面力对点之矩的计算方法。
- 理解力偶的性质和力偶等效条件。
- 掌握平面力偶系合力偶的求解方法。
- 理解平面力偶系的平衡条件。

能力目标

- 具备计算平面力对点之矩、平面力偶系合力偶的能力。
- 具备应用平面力偶系平衡条件分析平衡问题的能力。



内容框架



工程案例

如图 3-1(a)所示, 牛头刨床作为一种常用的机床, 因形似牛头而得名, 主要适用于平面、T形槽、燕尾槽等表面的刨削加工, 其工作原理是通过摇杆左右摆动, 使牛头刨床的刨刀沿着固定轨迹运动, 完成零件刨削加工。某型号牛头刨床传动机构的简图如图 3-1(b)所示, 圆轮上的销子 A 放在摇杆 BC 上的光滑导槽内, 圆轮上作用一力偶, 其力偶矩 $M_1 = 25 \text{ N} \cdot \text{m}$, $OA = r = 0.4 \text{ m}$ 。图示位置时, OA 与 OB 垂直, $\alpha = 30^\circ$, 且系统处于平衡状态, 若不计机构自重, 试分析作用于摇杆 BC 上的力偶矩 M_2 及铰链 O、B 处的约束力。

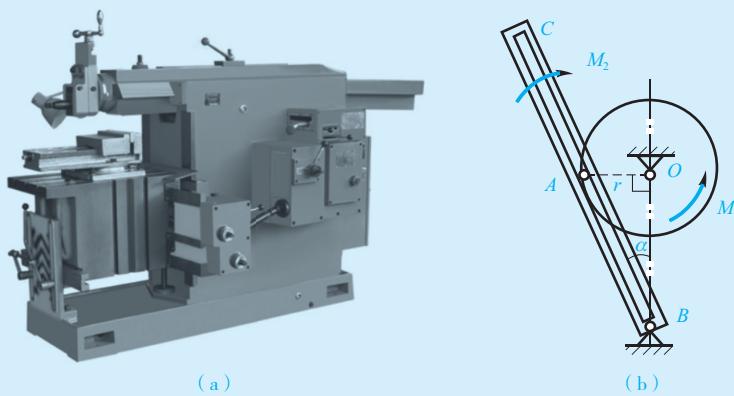
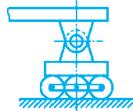


图 3-1 牛头刨床



笔记

3.1 力矩和合力矩定理

3.1.1 力对点之矩

如图 3-2 所示, 用扳手转动螺母时, 作用于扳手 A 点的力 F 可使扳手与螺母一起绕螺母中心点 O 转动。螺母中心到力的作用线的距离 d 越大, 转动的效果就越好, 且越省力。由此可知, 力的这种转动作用不仅与力的大小、方向有关, 还与转动中心至力的作用线的垂直距离 d 有关。点 O 称为矩心, 点 O 到力的作用线的垂直距离 d 称为力臂。

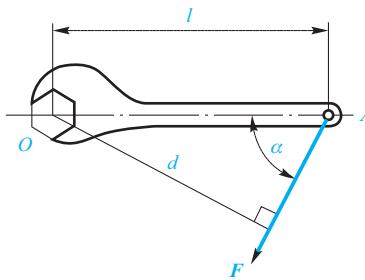


图 3-2 扳手的受力

因此, 定义力 F 的大小与力臂 d 的乘积为力 F 使物体对矩心 O 产生转动效应的度量, 称为力 F 对点 O 之矩, 简称为力矩, 用 $M_O(F)$ 表示。力矩为代数量, 规定力使物体绕矩心逆时针转动时为正, 反之为负。用公式表示为

$$M_O(F) = \pm Fd \quad (3-1)$$

一般来说, 同一个力对不同点产生的力矩是不同的, 因此不指明矩心而求力矩是无任何意义的。在表示力矩时, 必须标明矩心。

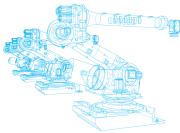
3.1.2 力矩的性质

从力矩的定义式(3-1)可知, 力矩有以下几个性质。

- (1) 力 F 对 O 点之矩不仅取决于力的大小, 同时还与矩心的位置即力臂 d 有关。
- (2) 力沿其作用线移动时, 力的大小、方向以及力臂都没有发生改变, 因此力矩不变。
- (3) 力 F 的大小等于零或者力的作用线通过矩心时, 力矩等于零。

3.1.3 合力矩定理

合力矩定理: 平面汇交力系的合力对于平面内任意一点的力矩等于所有分力对于该点之矩的代数和, 即



$$M_O(\mathbf{R}) = M_O(\mathbf{F}_1) + M_O(\mathbf{F}_2) + \cdots + M_O(\mathbf{F}_n) \quad (3-2)$$

该式适用于任何有合力存在的力系。

【例 3-1】 如图 3-3(a) 所示, 作用于齿轮的啮合力 $F_n = 400 \text{ N}$, 分度圆直径 $D = 60 \text{ mm}$, 压力角 $\alpha = 20^\circ$, 求啮合力 F_n 对于轮心 O 之矩。

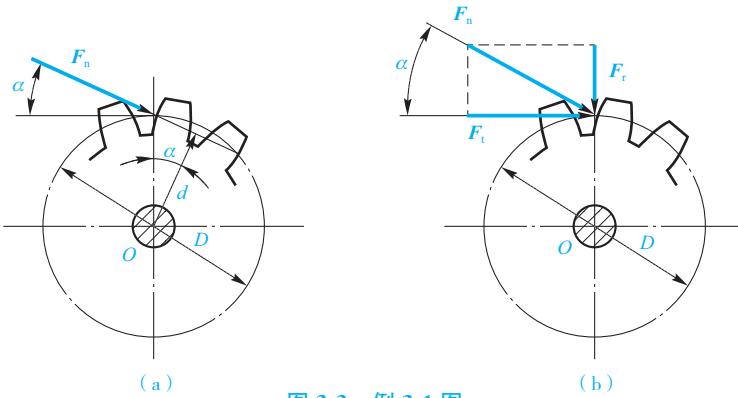


图 3-3 例 3-1 图

【解】 方法一 应用合力矩定理求解。把啮合力 F_n 分解为水平分力 F_t 和竖直方向分力 F_r , 根据合力矩定理, 则

$$\begin{aligned} M_O(\mathbf{F}_n) &= M_O(\mathbf{F}_t) + M_O(\mathbf{F}_r) \\ &= -F_n \cos \alpha \frac{D}{2} + 0 \\ &= -400 \times \cos 20^\circ \times \frac{0.06}{2} \text{ N} \cdot \text{m} + 0 \text{ N} \cdot \text{m} \approx -11.28 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

方法二 应用力矩定义求解。

$$M_O(\mathbf{F}_n) = -F_n d = -400 \times \frac{0.06}{2} \times \cos 20^\circ \text{ N} \cdot \text{m} \approx -11.28 \text{ N} \cdot \text{m}$$

以上两种方法的计算结果相同。因此, 在计算力矩时, 通常在力臂已知或者能直接计算的情况下, 采用力矩定义求解的方法较为简单。在直接计算力臂较为困难的情况下, 采用合力矩定理求力矩更为方便。

【例 3-2】 图 3-4 所示为一挡土墙, 已知挡土墙自重 $W_1 = 75 \text{ kN}$, 竖直土压力 $W_2 = 120 \text{ kN}$, 水平土压力 $F = 90 \text{ kN}$, 试求三力对 A 点的力矩之和, 并判断挡土墙是否会倾倒。

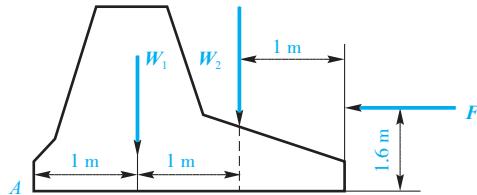
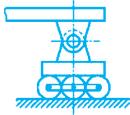


图 3-4 例 3-2 图



笔记

【解】 本题考查力对点之矩的概念。

对 A 点, W_1 产生的力矩为(力臂 d_1 为 1 m)

$$M_A(W_1) = -W_1 d_1 = -75 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

F 产生的力矩为(力臂 d 为 1.6 m)

$$M_A(F) = Fd = 144 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

W_2 产生的力矩为(力臂 d_2 为 2 m)

$$M_A(W_2) = -W_2 d_2 = -240 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

由于 $|M_A(W_1) + M_A(W_2)| > |M_A(F)|$

即 W_1 、 W_2 产生的稳定力矩大于 F 产生的倾覆力矩, 故挡土墙不会倾倒。

3.2 平面力偶理论

3.2.1 力偶和力偶矩

在生产和生活实践中, 为了使物体发生转动, 常常在物体上施加一对大小相等、方向相反的平行力。例如, 汽车司机旋转方向盘、钳工用丝锥攻螺纹等。人们把这种大小相等、方向相反、作用线平行的一对力称为力偶, 通常用符号 (F, F') 表示, 如图 3-5 所示。

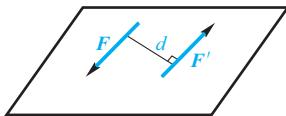


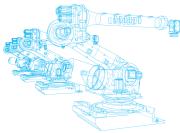
图 3-5 力偶

力偶对物体的作用效应, 实质上是组成功偶的两个力作用效应的叠加。由于这两个力大小相等、方向相反, 它们在任意方向上的投影之和都等于零, 所以这两个力使物体平移的运动效应相互抵消, 而使物体转动的运动效应相互叠加。因此, 力偶对物体作用的外效应仅是使物体发生转动。由于力偶不能合成为一个合力或用一个力来等效替换, 所以力偶也不能用一个力来平衡, 力偶只能用力偶来平衡。力和力偶是静力学的两个基本要素。

力偶使物体转动的效应, 通常用力偶矩来度量。力偶矩用符号 $M(F, F')$ 表示, 也可以简写成 M , 它等于力偶中力的大小 F 与力偶臂 d 的乘积, 即

$$M(F, F') = M = \pm Fd \quad (3-3)$$

力偶矩是一个代数量, 式中的正负号表示力偶在其作用面内的转向, 逆时针为正, 反之为负。



力偶对其作用面内任意一点的矩都等于力与力偶臂的乘积，与矩心位置无关，这是力偶矩和力矩的主要区别。力偶矩和力矩的单位相同，都是 $N \cdot m$ 。力偶矩的大小、转向和力偶作用平面为力偶的三要素。

3.2.2 力偶的等效条件

由于力偶的作用只改变物体的转动状态，而力偶对物体的转动效应是用力偶矩来度量的。因此，同一平面内力偶等效的条件是：力偶矩的大小相等，力偶的转向相同。

由此可以推断，保持力偶矩大小与方向不变的条件下(见图 3-6)，在力偶作用面内随意改变构成功偶的两力的方向[见图 3-6(b)]，或在保持力偶矩不变情况下改变力与力偶臂的大小[见图 3-6(c)]，或将力偶作用面平行移动[见图 3-6(d)]，都不改变力偶对刚体的作用效果。

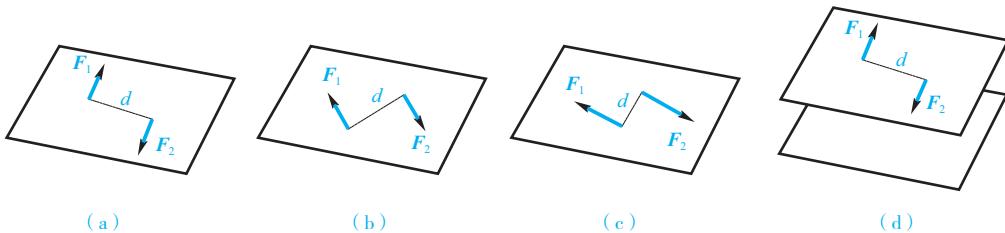


图 3-6 力偶矩大小与方向

3.2.3 力偶的性质

- (1) 力偶在任一坐标轴上的投影的代数和为零。
- (2) 力偶对平面任意一点的力矩，恒等于其力偶矩，而与矩心的位置无关。
- (3) 力偶不能合成为一个合力或用一个力来等效替换，因此力偶也不能用一个力来平衡，力偶只能用力偶来平衡。

3.2.4 平面力偶系的合成和平衡条件

在物体的同一平面上同时作用有两个或两个以上力偶时，这些力偶组成平面力偶系。由于平面内力偶对物体的作用效果取决于力偶矩的大小以及力偶的转向，因此平面力偶系合成的结果为一合力偶，其合力偶矩 M 等于各分力偶矩的代数和，即

$$M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (3-4)$$

由合成结果可知，平面力偶系可由一个合力偶代替，当平面力偶系平衡时，其合力偶的矩等于零。因此，平面力偶系平衡的充要条件是：所有各分力偶矩的代数



和等于零，即

笔记

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = 0 \quad (3-5)$$

【例 3-3】 如图 3-7 所示, 长方体上作用两个力偶, 其中 $F_1 = F'_1 = 2 \text{ kN}$, $F_2 = F'_2 = 5 \text{ kN}$ 。求此力偶系的合力偶矩。

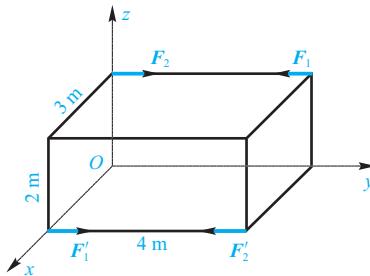


图 3-7 例 3-3 图

【解】 各力偶的力偶矩为

$$M_1 = M(F_1, F'_1) = 2 \times \sqrt{2^2 + 3^2} \text{ kN} \cdot \text{m} = 2\sqrt{13} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = M(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}'_2) = -5 \times \sqrt{2^2 + 3^2} \text{ kN} \cdot \text{m} = -5\sqrt{13} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

故合力偶之力偶矩为

$$M = M_1 + M_2 = -3\sqrt{13} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

其值为负说明合力偶矩为顺时针方向。

【例 3-4】 如图 3-8 所示的工件上作用有三个力偶，工件放在光滑水平面上。三个力偶的矩分别为 $M_1 = M_2 = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_3 = 20 \text{ N} \cdot \text{m}$; 固定螺柱 A 和 B 的距离 $l = 200 \text{ mm}$ 。求两个光滑螺柱所受的水平力。

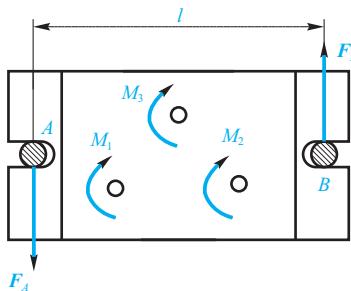
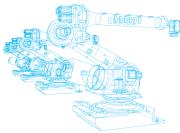


图 3-8 例 3-4 图

【解】 (1)以工件为研究对象。

(2) 分析工件受力情况。工件在水平面内受到三个力偶和两个约束反力的作用而处于平衡状态。根据力偶系合成定理, 三力偶的合成结果为一个合力偶。此时若要



系统保持平衡，螺柱 A 和螺柱 B 对工件的水平约束反力 F_A 和 F_B 应构成一个力偶，且与原合力偶平衡。假设由 F_A 和 F_B 构成的力偶的方向如图 3-8 所示，则有 $F_A = F_B$ ，且满足力偶系平衡条件。

(3) 根据力偶系平衡条件列出方程，并求解未知量。

$$\sum M = 0, F_A l - M_1 - M_2 - M_3 = 0$$

将题中条件代入后，可解得 $F_A = F_B = 200$ N。求得结果为正，说明 F_A 和 F_B 的方向与假设方向相同。螺柱 A 和 B 所受到的力与 F_A 和 F_B 等值反向。

由上述任务，可以总结出利用力偶系平衡条件求解平面力偶系问题的一般步骤：

第一步，确定研究对象；

第二步，对研究对象进行受力分析；

第三步，利用平衡方程求解未知量。

所求结果的绝对值表示未知力的大小，正、负号表示第二步中所假设的方向是否与实际一致，正号表示一致，负号表示其方向刚好相反。



工程案例分析

(1) 如图 3-9 所示，取圆轮为研究对象，圆轮上作用有光滑导槽对销子 A 的力 F_A (垂直摇杆 BC)、铰链 O 处约束力 F_O 以及力偶矩为 M_1 的力偶。

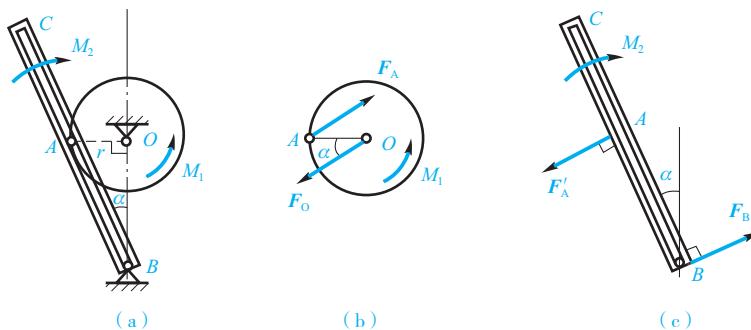


图 3-9 牛头刨床的受力分析

因为力偶只能由力偶平衡，所以 F_A 与 F_O 必然组成一对力偶，力偶矩大小与 M_1 相等，力偶转向与 M_1 相反。由此可以确定 F_A 必然指向圆轮， F_O 指向摇杆 [见图 3-9(b)]，根据平面力偶系的平衡条件，列出平衡方程

$$\sum M = 0, M_1 - F_A r \sin \alpha = 0$$

解得

$$F_A = \frac{M_1}{r \sin 30^\circ} = 125 \text{ N}$$



笔记

(2) 以摇杆BC为研究对象, 摆杆上作用有销子对光滑导槽的力 \mathbf{F}'_A 、铰链B处约束力 \mathbf{F}_B 以及力偶矩为 M_2 的力偶[见图3-9(c)]。同理, \mathbf{F}'_A 、 \mathbf{F}_B 也必然组成一对力偶与 M_2 平衡, 由此可得

$$\sum M = 0, M_2 - F'_A \frac{r}{\sin \alpha} = 0$$

其中 \mathbf{F}_A 与 \mathbf{F}'_A 为作用力与反作用力, 由此可得 $M_2 = F'_A \frac{r}{\sin \alpha} = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

\mathbf{F}_O 与 \mathbf{F}_A 组成力偶, \mathbf{F}_B 与 \mathbf{F}'_A 组成力偶, 则 $F_O = F_A = F_B = 125 \text{ N}$, 方向如图3-9所示。



思考与练习

- 3-1 试比较力矩与力偶矩两者的异同。
- 3-2 力偶的三要素是什么?
- 3-3 力偶对物体的作用效果取决于什么? 与力偶的作用位置是否有关?
- 3-4 力偶是否可以用一个力来平衡? 为什么?
- 3-5 如图3-10所示, 水平梁上作用有两个力偶, 分别为 $M_1 = 75 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_2 = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 已知 $AB = 3.5 \text{ m}$, 试求A、B两处支座的约束反力。

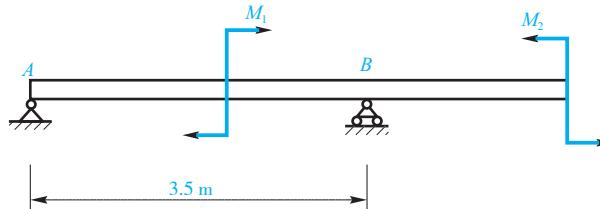


图3-10 题3-5图

- 3-6 如图3-11所示, 已知 $M = 2Fl$, 其余尺寸如图所示, 试求A、B两处支座的约束反力。

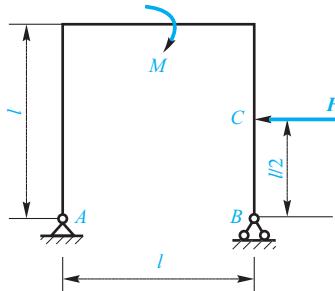
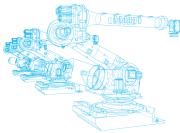


图3-11 题3-6图



在线测试



3-7 如图 3-12 所示, 100 N 的力作用于扳手柄端。当 α 角为何值时, 该力矩为最小值? 当 α 角为何值时, 该力矩为最大值?

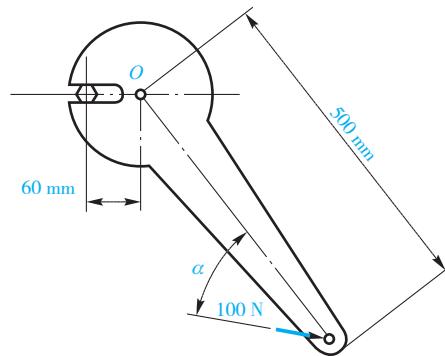


图 3-12 题 3-7 图

3-8 如图 3-13 所示, 设 $AB = l$, 在 A 点受四个大小均等于 F 的力 \mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 、 \mathbf{F}_3 和 \mathbf{F}_4 作用。试分别计算每个力对 B 点之矩。

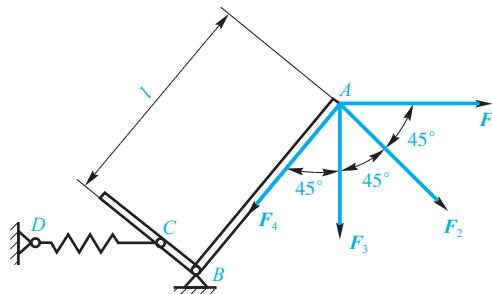


图 3-13 题 3-8 图

3-9 如图 3-14 所示, 带轮直径 $D = 400 \text{ mm}$; 平带拉力 $F_1 = 1500 \text{ N}$, $F_2 = 750 \text{ N}$; 与水平线夹角 $\theta = 15^\circ$ 。求平带拉力 \mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 对轮心 O 之矩。

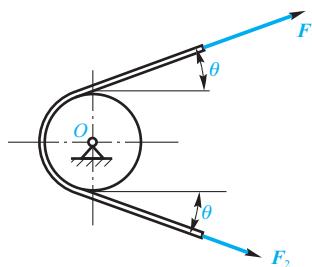
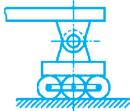


图 3-14 题 3-9 图

3-10 简支梁 AB 如图 3-15 所示, 其上作用一力偶矩 M , 已知梁长为 L , 不计自重, 求支座约束力。



笔记

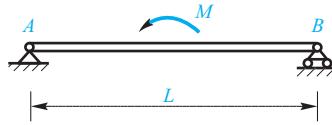


图 3-15 题 3-10 图

3-11 图 3-16 所示的机构中, 两曲杆自重不计, 曲杆 AB 上作用有主动力偶, 其力偶矩为 M , 试求 A 点和 C 点处的约束力。

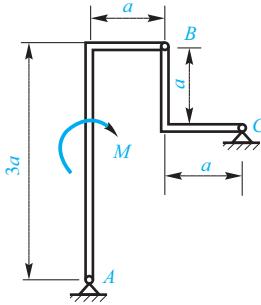


图 3-16 题 3-11 图

3-12 图 3-17 所示机构在图示位置平衡, 已知主动力 $F = 100 \text{ N}$, 各杆重量不计, 试求图中力偶矩 M 的大小及支座 A 处的约束力。

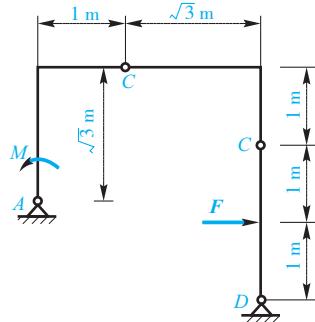


图 3-17 题 3-12 图

平面任意力系 第4章

平面任意力系是指作用在物体上的力的作用线都分布在同一个平面内，且作用线任意分布的力系。平面任意力系是工程实际中常见的一类力学问题。例如图 4-1 所示的高炉上料小车，受到的拉力、重力及支持力作用，显然这是一个平面任意力系。工程中很多实际问题都可简化为平面任意力系问题来分析，因此，研究平面任意力系的平衡问题就显得非常重要。

本章将在前两个任务的基础上，利用力的线平移定理，将平面任意力系平衡问题转化成平面汇交力系平衡问题和平面力偶系平衡问题，从而完成平面任意力系的简化和平衡问题的求解。

课程思政

“三个和尚没水喝”和“超静定结构”



“三个和尚没水喝”和
“超静定结构”

“三个和尚没水喝”是一个中国的民间谚语，当涉及多人合作时，如果每个人都依赖其他人去完成任务，那么最终可能会导致任务无法完成。当团队协作中的责任分散时，团队中的人员会缺乏主动性。

“超静定结构”是一种力学结构。一个结构系统的稳定性不仅依赖于其组成部分的刚性，还依赖于这些组成部分之间的相互作用。这种结构在受到外部力或变形时，能够通过内部应力的重新分布来保持其稳定性。

虽然“三个和尚没水喝”和“超静定结构”看似没有直接联系，但是它们都涉及关于系统稳定性和个体行为对整体性能影响的问题，表明了更深入地理解团队协作和系统稳定的重要性。

知识目标

掌握力的平移定理和力系向作用面内任意一点简化的办法。

了解平面任意力系的简化结果。

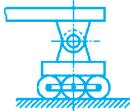
熟练掌握平面任意力系的平衡条件和平衡方程。

了解物体系的平衡、静定和静不定问题。

能力目标

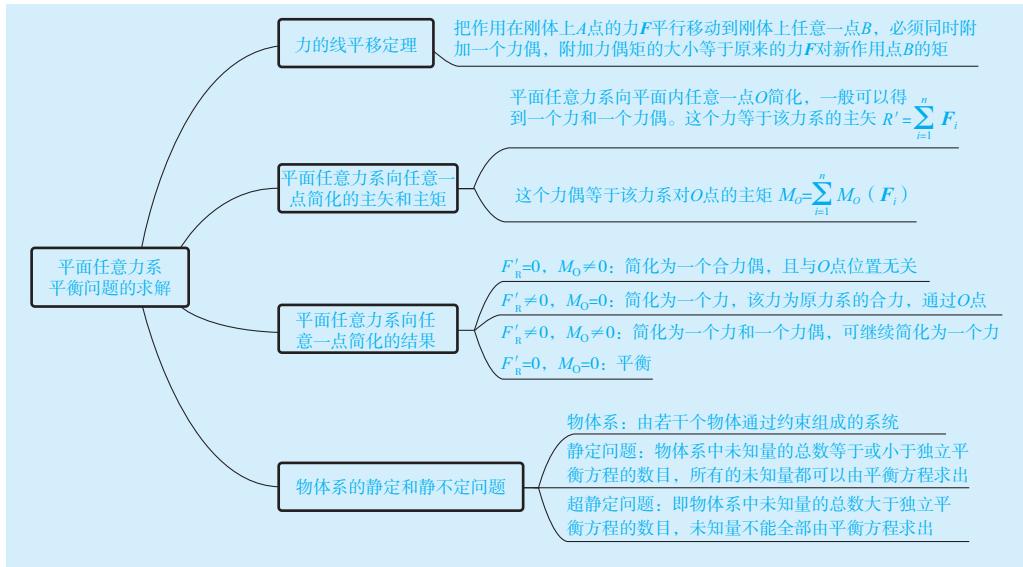
具备应用力的线平移定理完成力系向作用面内任意一点简化的能力。

具备应用平面汇交力系平衡条件分析平衡问题的能力。



笔记

内容框架

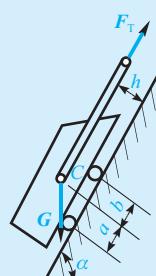


工程案例

高炉是炼铁生产工艺中的主体, 其工艺过程是从炉顶加入矿石、焦炭和石灰石, 从炉底向炉内通入加压空气。在焦炭燃烧时, 矿石、石灰石与焦炭一起发生反应, 最终形成铁水和炉渣。高炉上料是高炉炼铁系统中最重要的一环。高炉上料设备作为运输矿石、焦炭和石灰石等高炉原料的主要工具, 其稳定运行会直接影响高炉生产。图 4-1(a)所示的高炉上料小车是高炉上料设备的一种类型, 具有投资小、运行维护费用低等优点, 在国内外很多高炉得到广泛应用。高炉上料小车运行情况的平面简图为图 4-1(b)。小车由钢索牵引沿倾角为 α 的轨道匀速上升, 已知小车及原料的总重力 G 和其他尺寸 a 、 b 、 h , 不计小车和轨道之间的摩擦, 试求钢索拉力 F_T 和轨道对小车的约束力。

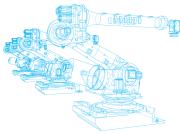


(a)



(b)

图 4-1 高炉上料小车



4.1 平面任意力系向作用面内任意一点简化

4.1.1 力的线平移定理

力系向一点简化是一种较为简便且具有普遍适用性的力系简化方法，这一方法的理论基础是力的线平移定理。

力的线平移定理是指把作用在刚体上 A 点的力 F 平行移动到刚体上任意一点 B ，必须同时附加一个力偶，附加力偶矩的大小等于原来的力 F 对新作用点 B 的矩。

证明：如图 4-2 所示，刚体上 A 点作用有一力 F 。在刚体上任取一点 O 并在 O 点加上一对平衡力 F' 和 F'' ，作用线与 F 平行，令 $F' = F = -F''$ 。由静力学公理 3 可知，这三个力组成的新力系与原来的力 F 等效，同时这三个力又可以看成是作用在 O 点的力 F' 和一个力偶 (F, F'') ，这个力偶称为附加力偶，且有

$$M = Fd = M_O(F)$$

至此，定理获证。

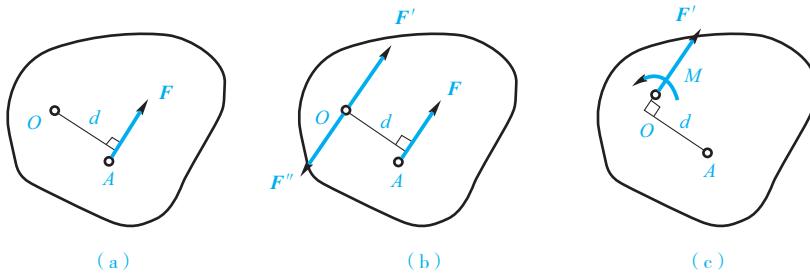


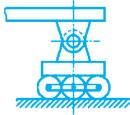
图 4-2 刚体与力偶

力的平移定理说明，一个力可以用一个作用在另一点的同样大小和方向的力及一个力偶来等效代替。反过来，根据力的平移定理，可证明其逆定理也成立，即同一平面内的一个力和一个力偶可合成一个力。

4.1.2 平面任意力系向任意一点简化的主矢和主矩

设刚体受一个平面任意力系作用，利用力的线平移定理，可将平面任意力系向一点简化为一个平面汇交力系和一个平面力偶系，然后利用平面汇交力系和平面力偶系的平衡方程来解决平面任意力系的平衡问题。

如图 4-3(a)所示，由 n 个力 F_1, F_2, \dots, F_n 组成的平面任意力系作用在刚体上。在平面上任取一点 O ，称为**简化中心**；应用力的线平移定理，把各力都平移到点 O 。这样，得到作用于点 O 的力 F'_1, F'_2, \dots, F'_n 以及相应的附加力偶，其力偶



笔记

矩分别为 M_1, M_2, \dots, M_n ，如图 4-3(b) 所示。这些附加力偶的矩分别为

$$M_i = M_O(\mathbf{F}_i) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

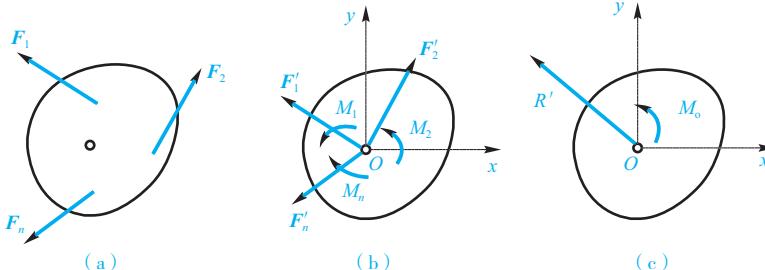


图 4-3 平面任意力系

这样，平面任意力系分解成了一个平面汇交力系和一个平面力偶系。其中，平面汇交力系可根据平面汇交力系平衡法则合成为通过 O 点的一个力 \mathbf{R}' [见图 4-3(c)]，且有

$$\mathbf{R}' = \mathbf{F}'_1 + \mathbf{F}'_2 + \dots + \mathbf{F}'_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

即力矢 \mathbf{R}' 等于原来各力的矢量和。

平面力偶系可以合成为一个力偶，该力偶的矩 M_O 等于各附加力偶矩的代数和，也等于原来各力对 O 点之矩的代数和，即

$$M_O = \sum_{i=1}^n M_O(\mathbf{F}_i)$$

平面任意力系中所有各力的矢量和 \mathbf{R}' ，称为该力系的 **主矢**；而这些力对任意简化中心 O 之矩的代数和 M_O ，称为该力系对简化中心 O 的 **主矩**。

由于主矢等于各力的矢量和，所以 **主矢与简化中心的选择无关**。而主矩等于各力对简化中心的矩的代数和。简化中心不同，各力的力臂也不同，从而导致各力对简化中心的矩也不一样，**因此主矩一般与简化中心有关**，讲到主矩时必须指出是力系对哪个简化中心的主矩。

因此，在一般情况下，平面任意力系向作用面内任意一点 O 简化，其结果为作用于该点的一个主矢和一个主矩。

【例 4-1】 如图 4-4(a) 所示，边长为 $a=1$ m 的正方形受三力作用，已知各力的大小均为 10 N。求此力系向 A 点的简化结果。

【解】 求一个力系向某点的简化结果，就需要计算该力系的主矢及对简化中心的主矩。

该力系的主矢为

$$F'_{Rx} = F_2 = 10 \text{ N}$$

$$F'_{Ry} = F_1 - F_3 = 0$$

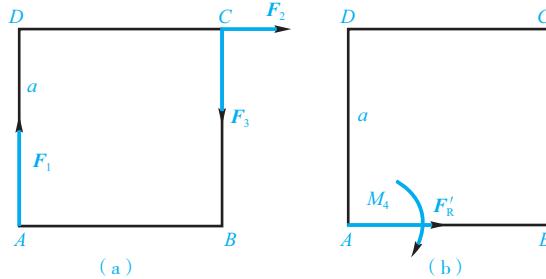
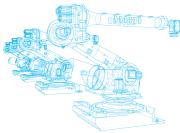


图 4-4 例 4-1 图

该力系对简化中心 A 的主矩为

$$M_A(\mathbf{F}) = -F_2a - F_3a = -20 \text{ N} \cdot \text{m}$$

因此, 该力系向 A 点简化的结果为一个力 \mathbf{F}'_R 和一个力偶 M_A , 力 \mathbf{F}'_R 的大小等于该力系的主矢, 力偶 M_A 的大小和转向与该力系对 A 点的主矩相同, 如图 4-4(b) 所示。

【例 4-2】 平面任意力系中 $F_1 = 40\sqrt{2}$ N, $F_2 = 80$ N, $F_3 = 40$ N, $F_4 = 110$ N, $M = 2000 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。各力作用位置如图 4-5(a) 所示, 图中的尺寸单位为 mm。求该力系向 O 点的简化结果, 并在图中标明该力系合力的作用位置。

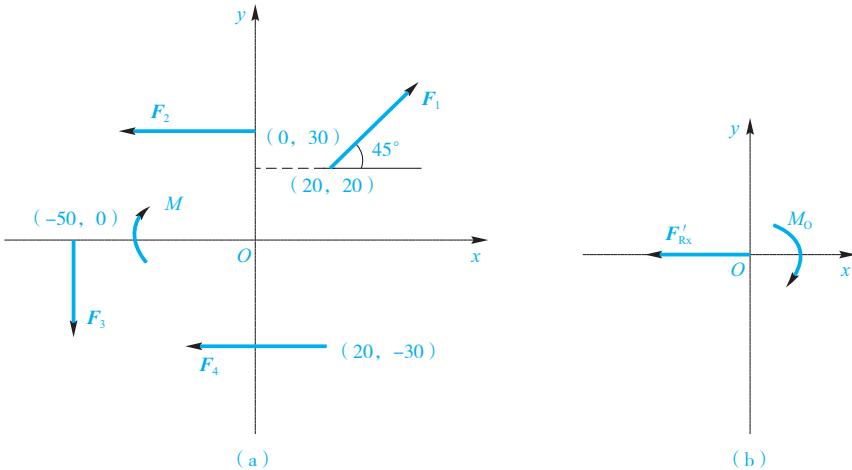


图 4-5 例 4-2 图

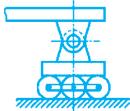
【解】 该力系向 O 点简化后的主矢为

$$F'_R = F_1 \cos 45^\circ - F_2 - F_4 = -150 \text{ N}$$

$$F'_{Ry} = F_1 \sin 45^\circ - F_3 = 0$$

该力系对简化中心 O 的主矩为

$$\begin{aligned} M_O &= F_1 \sin 45^\circ \times 20 + F_2 \times 30 + F_3 \times 50 - F_1 \cos 45^\circ \times 20 - F_4 \times 30 - M \\ &= -900 \text{ N} \cdot \text{mm} \end{aligned}$$



笔记

因此, 该力系向 O 点简化的结果为一个 \mathbf{F}'_{Rc} 和一个力偶 M_O , 力 \mathbf{F}'_{Rc} 的大小等于该力系的主矢, 力偶 M_O 的力偶矩的大小和转向与该力系对 O 点的主矩相同, 如图 4-5(b) 所示。

4.2 平面任意力系的简化结果

平面任意力系向作用面内任意一点简化的结果, 可分为四种情况:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| (1) $\mathbf{F}'_R = 0, M_O \neq 0;$ | (2) $\mathbf{F}'_R \neq 0, M_O = 0;$ |
| (3) $\mathbf{F}'_R \neq 0, M_O \neq 0;$ | (4) $\mathbf{F}'_R = 0, M_O = 0.$ |

下面分别讨论。

4.2.1 平面任意力系简化为一个力偶的情形

如果力系的主矢等于零, 而力系对简化中心的主矩不等于零, 即

$$\mathbf{F}'_R = 0, M_O \neq 0$$

则原力系向简化中心等效平移后的汇交力系已自行平衡, 只剩下附加力偶系, 而附加力偶系可以合成为一个合力偶。因此原力系与此合力偶等效, 即原力系简化成一个力偶, 这个力偶是原力系的合力偶。因为力偶对平面内的任意一点之矩都相同, 所以, 其合力偶矩与简化中心的位置无关, 其大小和转向可以直接确定。这是平面任意力系简化的一种最简形式。

4.2.2 平面任意力系简化为一个合力的情形

(1) 如果力系的主矢不等于零, 而力系对于简化中心的主矩等于零, 即

$$\mathbf{F}'_R \neq 0, M_O = 0$$

则力系等效于经过简化中心 O 的一个力 \mathbf{F}'_R , 故原力系简化的结果是一个合力。

(2) 如果力系的主矢、主矩都不等于零, 即

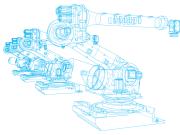
$$\mathbf{F}'_R \neq 0, M_O \neq 0$$

则力系简化的结果为一个力和一个力偶, 根据力的平行定理的逆定理可知, 主矢和主矩可合成为一个力。

4.2.3 平面任意力系平衡的情形

如果力系的主矢、主矩都等于零, 则原力系平衡, 即

$$\mathbf{F}'_R = 0, M_O = 0$$



4.3 平面任意力系的平衡方程

平面任意力系平衡的充分和必要条件是：力系的主矢和对任意一点的主矩都为零，即

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{F}'_R = 0 \\ M_O = 0 \end{array} \right\}$$

上述平衡条件也可用解析式表达如下

$$\left. \begin{array}{l} \sum \mathbf{F}_x = 0 \\ \sum \mathbf{F}_y = 0 \\ \sum M_O(\mathbf{F}) = 0 \end{array} \right\}$$

上式为平面任意力系的平衡方程，它是平衡方程的基本形式，表示力系中各力在平面内任意坐标轴上的投影的代数和都等于零，各力对于任意一点的矩的代数和也等于零。

下面结合实例，说明如何利用该平衡方程求解平面任意力系的平衡问题。

【例 4-3】 无重水平梁的支承和载荷如图 4-6(a) 所示，已知力 \mathbf{F} 、力偶矩 M ，求支座 A 和 B 处的约束反力。

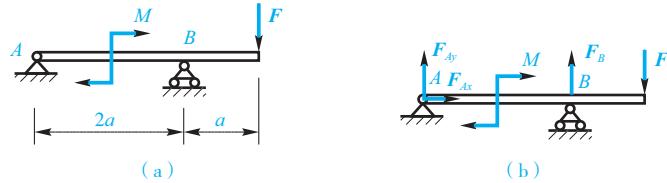


图 4-6 例 4-3 图

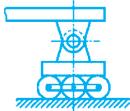
【解】 以梁 AB 为研究对象。梁 AB 所受的主动力有力 \mathbf{F} 和力矩为 M 的力偶。梁 AB 所受约束反力有铰链 A 的两个分力 \mathbf{F}_{Ax} 和 \mathbf{F}_{Ay} ，以及滚动支座 B 处沿竖直方向的约束反力 \mathbf{F}_B 。受力情况如图 4-6(b) 所示。由平面任意力系的平衡方程

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_B - F = 0$$

$$\sum M_A = 0, -M + F_B \cdot 2a - F \cdot 3a = 0$$

可解得 $F_{Ax} = 0$, $F_{Ay} = -\frac{1}{2a}(aF + M)$, $F_B = \frac{1}{2a}(3aF + M)$ 。



笔记

F_{Ay} 为负, 说明其方向与图示方向相反, 即应竖直向下; F_B 为正, 说明其方向与图示方向相同。

注意: 在利用平面任意力系平衡方程分析平衡问题时, 为使求解简便, 通常将矩心选在众多未知力的交点上, 坐标轴之一一般选在与未知力平行或垂直的方向上。

4.4 物体系的平衡、静定和静不定问题

工程实际中的机械结构通常是由许多零部件按一定形式的约束连接组成的, 这种由若干个物体通过约束组成的系统称为**物体系**。对物体系平衡问题的研究, 是静力学平衡方程中极为重要的综合应用。

在研究物体系的平衡问题时, 不仅需要分析物体系统所受的未知外力, 有时还需要分析各零部件之间相互作用的内力。对于整个物体系统来说, 内力总是成对出现的, 因为内力的矢量和恒等于零, 所以不需要分析内力。分析计算内力只能把系统中与所求内力相关的零部件分离出来单独研究。即使不需要分析内力, 对于物体系的平衡问题, 有时也需要把一些物体分开来研究, 才能求出所有的未知外力。

当整个物体系平衡时, 物体系内各个刚体也处于平衡状态。因此对每个受平面任意力系作用的刚体, 都可以列出 3 个独立的平衡方程, 求解 3 个未知量。对由 n 个刚体组成的物体系来说, 独立平衡方程的数目为 $3n$, 求解的未知量数也为 $3n$ 。根据所研究问题的需要, 正确选择整体或局部为研究对象进行分析, 是解决物体系平衡问题的关键。

当然, 如果系统中的刚体有受平面汇交力系或平面平行力系作用时, 整个系统的独立平衡方程数目会相应地减少。如果物体系中未知量的总数等于或小于独立平衡方程的数目时, 则所有的未知量都可以由平衡方程求出, 这样的问题称为**静定问题**。

如果物体系中未知量的总数大于独立平衡方程的数目时, 则未知量不能全部由平衡方程求出, 而只能求出其中的一部分未知量, 这样的问题称为**静不定问题或超静定问题**。

下面举例说明静定和超静定问题。

如图 4-7(a)所示, 吊车起吊重物, 重物用两根绳子挂在吊钩上。重物的重力 P 为已知力, 而两根绳子的拉力为未知力。那么在这样的一个系统中, 重物受到的力形成一个平面汇交力系。平面汇交力系有 2 个独立的平衡方程, 可以求解 2 个未知量, 因此这是一个静定问题。

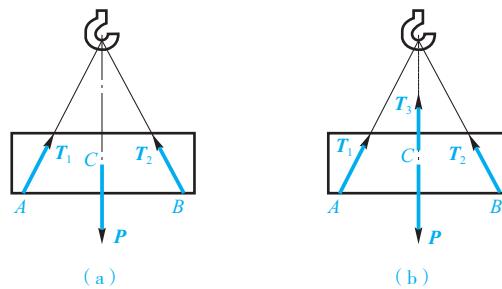
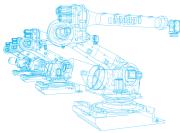


图 4-7 吊车起吊的重物受力

但有时出于安全考虑,会用3根绳子悬挂重物,如图4-7(b)所示。这时重物受到的力仍是平面汇交力系,但未知力的数目为3个,即系统中未知力的数目大于平衡方程的数目,此时就变成了超静定问题。

【例 4-4】 如图4-8(a)所示,梁ABC是由梁AB和梁BC组成的连续梁,其中梁AB一端为固定端,另一端通过铰链与梁BC连接。已知a、M、θ,求该连续梁在A、B、C三处的约束反力。

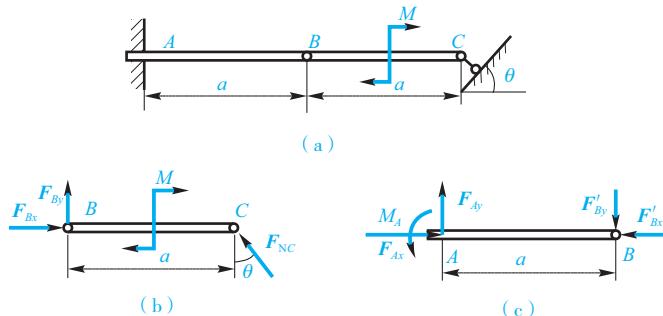


图 4-8 例 4-4 图

【解】 (1)以梁BC为研究对象。它所受主动力是矩为M的力偶。它所受约束反力有铰链B的两个分力 F_{Bx} 和 F_{By} ,滚动支座C处垂直于支承面向上的约束反力 F_c ,如图4-8(b)所示。由平面任意力系的平衡方程

$$\sum F_x = 0, F_{Bx} - F_{NC} \sin \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{By} + F_{NC} \cos \theta = 0$$

$$\sum M_B = 0, -M + F_{NC} \cdot a \cos \theta = 0$$

$$\text{可解得: } F_{Bx} = \frac{M}{a} \tan \theta, F_{By} = -\frac{M}{a}, F_{NC} = \frac{M}{a \cos \theta}.$$

(2)以梁AB为研究对象。它受到B处的约束反力 F'_{Bx} 和 F'_{By} ,固定端A处的约束反力 F_{Ax} 和 F_{Ay} ,以及矩为 M_A 的力偶,如图4-8(c)所示。由平面任意力系的平



衡方程

笔记

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} - F'_{Bx} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} - F'_{By} = 0$$

$$\sum M_A = 0, M_A - F'_{By} \cdot a = 0$$

可解得 $F_{Ax} = \frac{M}{a} \tan \theta$, $F_{Ay} = -\frac{M}{a}$, $M_A = -M$ 。



工程案例分析

(1) 取上料小车为研究对象。

(2) 对上料小车进行受力分析。上料小车及原料总重力为 G (竖直向下), 钢绳对小车的拉力为 F_T (沿钢绳方向向上), 轨道与小车车轮间为光滑面约束, 因此轨道对小车车轮 A、B 的约束力分别为 F_A 、 F_B (垂直于轨道指向车轮)。上料小车受力分析如图 4-9 所示。

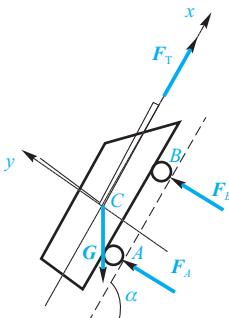


图 4-9 上料小车受力分析

(3) 选取简化中心, 简化力系。选择简化中心 C, 将平面任意力系简化成一个平面汇交力系和一个平面力偶系。

(4) 建立直角坐标系, 列平衡方程。为简化计算, 选择钢绳方向为 x 轴, 建立直角坐标系如图 4-9 所示。根据平衡条件, 列平衡方程

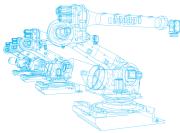
$$\sum F_x = 0, F_T - G \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_A + F_B - G \cos \alpha = 0$$

$$\sum M = 0, F_B b - F_A a = 0$$

(5) 求解。解联立方程组, 求得

$$F_T = G \sin \alpha, F_A = \frac{b G \cos \alpha}{a + b}, F_B = \frac{a G \cos \alpha}{a + b}$$



4-1 什么叫力系的主矢？它与合力有什么区别和联系？它与简化中心的位置有没有关系？

4-2 什么叫力系的主矩？它是否就是力偶系的合力偶矩？它与简化中心的位置有何关系？

4-3 已知一平面任意力系可以简化为一个合力，问能否通过选择适当的简化中心，把力系简化为一个合力偶？反之，如果已知力系可以简化为一个合力偶，能否通过选择适当的简化中心，把力系简化为一个合力？为什么？

4-4 什么叫超静定问题？如何判断问题是静定问题还是超静定问题？图 4-10 中，哪些是静定问题，哪些是超静定问题？

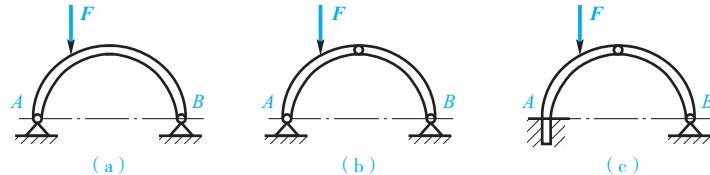


图 4-10 题 4-4 图

4-5 如图 4-11 所示，半径为 r 的圆盘上，以 O 为圆心，边长为 r 的正方形的四个顶点上分别作用着力 \mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 、 \mathbf{F}_3 、 \mathbf{F}_4 。已知 $F_1=F_2=F_3=F_4=F$ ，该力系对 O 点的主矩为 $M_O=2rF$ 。问该力系对 O' 点的主矩 $M_{O'}$ 为何值？ $M_{O'}$ 与 M_O 间有何关系？为什么是这种关系？

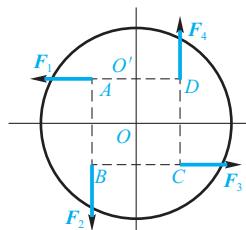


图 4-11 题 4-5 图

4-6 如图 4-12 所示，已知 \mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 、 \mathbf{F}_3 分别作用在点 C 、 O 、 B 上； $OABC$ 是一个正方形，边长为 a （单位为 mm）； $F_1=2$ kN， $F_2=4$ kN， $F_3=10$ kN，方向如图所示。求力系的最终简化结果。



笔记

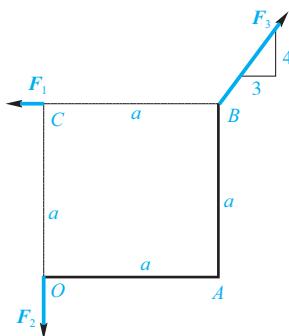


图 4-12 题 4-6 图

4-7 无重水平梁的支承和载荷如图 4-13 所示, 已知力 F 、力偶矩 M 和强度为 q 的均布载荷。求支座 A 和 B 处的约束反力。

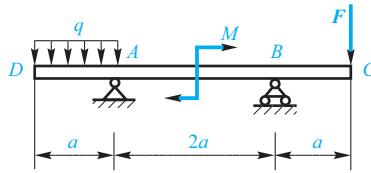


图 4-13 题 4-7 图

4-8 如图 4-14 所示, 起重机重力 $P_1 = 10 \text{ kN}$, 可绕竖直轴 AB 转动, 吊钩上挂一重力 $P_2 = 40 \text{ kN}$ 的重物, 起重机的重心 C 到转动轴的距离为 1.5 m , 其他尺寸如图所示。试求在止推轴承 A 和轴承 B 处的约束反力。

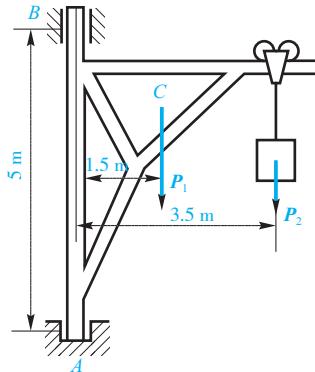


图 4-14 题 4-8 图

4-9 图 4-15 所示杆件 AB , 在杆件上作用力 F , 集中力偶 $M_O = Fa$, 求杆件的约束力。

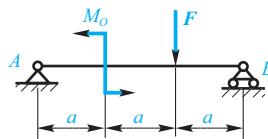
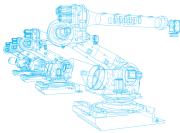


图 4-15 题 4-9 图

4-10 图 4-16 所示支架由杆 AB、CD 组成, A、C、D 处均为光滑铰链, 在 CB 上作用均布载荷 q , $M_o = qa^2$, $\alpha = 45^\circ$, 试求杆件 AB 的约束力。

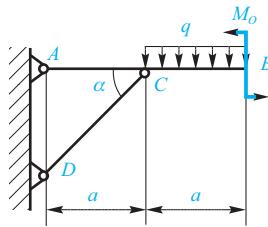


图 4-16 题 4-10 图

4-11 图 4-17 为悬臂梁的平面力学简图。已知梁长为 $2l$, 作用均布载荷 q , 作用集中力 $F = ql$ 和力偶 $M_o = ql^2$, 求固定端 A 的约束力。

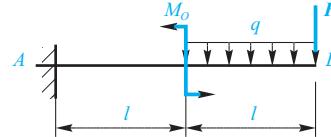


图 4-17 题 4-11 图